مقدمات فلسفی

اصالت وجود چیست؟

چنانچه بخواهیم دیدگاه اصالت وجود را به زبان ریاضی توصیف کنیم باید بگوییم که پیروان این مکتب بر این اعتقادند که شعور انسان شعوری تک بُعدیست که مفهوم «وجود» تک بُعد آن را می‌سازد. ما در پناه چنین بُعدی اندیشه می‌کنیم و می‌توان گفت گفتار و پندار انسان در چنین فضای تک بُعدی تحقق می‌یابد و مختصاتش از جنس چنین بُعدی است و همانگونه که پیداست توسط مختصات نمی‌توان به وصف خود بُعد رفت.

تعبیر نادرست وجود و عدم و ضرورت تعبیر جدید

ما به عادت روزمره از موجودات و مفاهیم گوناگون وجود، *مفهوم عامی از وجود* انتزاع می‌کنیم که به اعتقاد من نابجاست. ما همواره در هر مبحثی که پیش رو داریم با *مفهوم خاصی از وجود* روبرو هستیم. مثلا در مبحث حساب با مفهوم خاص وجود «عدد طبیعی بودن» روبرو هستیم، در جبر با مفهوم «عدد حقیقی بودن» و در فیزیک با مفهوم خاص وجود دیگری که تحت آن اجسام و اجرام موجود می‌شوند روبرو هستیم. از میان همهٔ این مفاهیم خاص وجود، مفهوم عامی از وجود انتزاع می‌کنیم که می‌پنداریم همهٔ این مفاهیم در آن اشتراک دارند. به موازات همین انتزاع نابجا، مفهومی در ذهن می پروریم که ظاهراً ضد وجود است و آنرا عدم نامیده‌ایم. به مجرد تحقق چنین مفهومی می‌بینیم که به نوعی این مفهوم در خودش تناقضی نهادین دارد. از خود می پرسیم عدم چیست؟ چگونه می توان از چیزی که نیست گفتگو کرد یا به دامان تخیلش کشاند؟ می‌کوشیم تا نارسایی‌ها را وصله پینه کنیم: می گوییم عدم مفهومی اعتباری است تا وجود یا عدم وجودش ما را با مشکلی روبرو نکند. چنانچه تاریخ فلسفه را ورق بزنید آنرا انباشته از بحث‌های عبثی پیرامون وجود و عدم می‌یابید.

به اعتقاد من احتراز از چنین تناقض گویی و بحث بیهوده مشروط به برداشتن گامی است که در عین بزرگی بسیار کوچک نیز هست: ما مفهومی بنام مفهوم عام وجود نداریم. یا بعبارت دیگر

عدم همان مفهوم عام وجود است.

این تنها چیزیست که میان همهٔ مفاهیم خاص وجود مشترک است. ما آن بخشی از وجود را عدم می‌انگاریم که هیچگونه تصوری ازش نداریم و هیچ اسم دیگری برایش قایل نیستیم. پیرو چنین تعبیری، برای عدم نیز می‌توان وجود قایل شد زیرا که خود، عام‌ترین مفهوم وجود است. با این ترتیب ما از این پس، با مفاهیم گوناگونی از وجود روبرو هستیم که آنها را « ***مفاهیم خاص وجود*** » می‌نامیم. در هر مبحثی که سراغ کنید، بسته به مضمومنی که پیش رو دارید با مفهوم خاصی از وجود روبرو هستید. مثلا در عالم مجردات، وقتی در حیطهٔ اعداد طبیعی بحث می‌کنید با مفهوم خاصی از وجود روبرو هستید که عبارت است از «عدد طبیعی بودن». وقتی مجموعهٔ اعداد طبیعی (یا کامل) را ملحوظ می‌کنید در می‌یابید که هرآنچه در مفهوم خاص وجود «عدد طبیعی بودن» گنجیدنی است در این مجموعه خواهد بود و هرآنچه در این مفهوم خاص وجود گنجیدنی نیست، صفر قلمداد خواهد شد. مثلاً عدد یک سوم عدد طبیعی (یا کامل) نیست، لاجرم از منظر این مفهوم خاص وجود، عدد یک سوم را باید در عدد صفر خلاصه کرد. یا به عبارت دیگر تبلور وجودی این عدد در پرتوی این مفهوم خاص وجود، صفر است. از طرف دیگر میز و صندلی هم عدد طبیعی (یا کامل) نیستند، پس تبلور میز و صندلی هم در پرتوی این مفهوم خاص وجود، صفر خواهد بود. وقتی‌که از این مبحث به سراغ

مبحث دیگری رفته و اعداد گویا را ملحوظ می‌کنید، می‌بینید که با مفهوم خاص نوینی از وجود روبرو هستید که در پرتوی آن اعداد کسری همچون یک سوم صاحب وجود هستند. حالا دیگر تبلور عدد یک سوم در این منظر از وجود، صفر نخواهد بود. ولی تبلور میز و صندلی در این منظر از وجود کماکان صفر است. علاوه بر این وقتی اعداد گنگی همچون $\sqrt{2}$ را ملحوظ می‌کنید می‌بینید که چنین اعدادی در این مفهوم خاص وجود گنجیدنی نیستند و لاجرم تبلور صفر خواهند داشت. ناگزیر در گام دیگری، به مفهوم خاص دیگری از وجود متوسل می‌شویم تا بتوانیم چنین اعداد گنگی را نیز ملحوظ کنیم. «عدد حقیقی بودن» آن مفهوم خاص وجود است که برای این مقصود بکار برده خواهد شد. در پرتوی این مفهوم خاص وجود نیز می‌توان چیزهایی را متصور شد که در آن نگنجند. گذشته از میز و صندلی، در همان عالم مجردات نیز می‌توان مفاهیمی سراغ گرفت که در این مفهوم خاص وجود نمی‌گنجند. مثال بارزش اعداد موهومی (یا مجازی) هستند، اعدادی که با تجسم جذر عددی منفی معنا می‌یابند (مثل $\sqrt{-1}$). در قلمروی اعداد حقیقی، هیچ عددی را نمی‌توان متصور شد که حاصل‌ضربش با خودش عددی منفی ارایه دهد. تبلور وجودی چنین اعدادی در پرتوی مفهومِ خاصِ وجودِ «عدد حقیقی بودن» صفر خواهد بود. برای تجسم چنین اعدادی ما ناگزیر از این هستیم که به مفهوم خاص دیگری از وجود روی آوریم. «عدد موهومی یا مختلط بودن» مفهوم خاص وجودیست که در پرتویش این اعداد بامعنی می‌شوند.

اکنون در رابطه با این مفاهیم گوناگون از وجود پرسش‌های زیر مطرح می‌شوند:

1- چه چیزی میان این مفاهیم گوناگون هست که انتزاع مفهوم عام وجود را مستدل سازد؟

به اعتقاد من مایهٔ اشتراک این مفاهیم خاص وجود چیزی جز عدم نیست. وقتی مفاهیم گوناگون «عدد طبیعی یا کامل بودن» و «عدد گویا بودن» و «عدد حقیقی بودن» را ملحوظ می‌کنیم این وسوسه در ما پیدا می‌شود که مایل به اعتراف این شویم که براستی چیزی میان اینها مشترک هست و آنهم «عدد بودن» است. ولی چنین چیزی نبایست از حد یک وسوسه فراتر رود زیرا مفهوم عدد هنوز که هنوز است بر اندیشمندانِ فلسفهٔ علم، گنگ است و به فرض اینهم که گنگ نباشد، بسختی بتوان طبیعت واحدی برای این موجودات گوناگون متصور شد. این مشکل بویژه وقتی گریبان ما را می‌گیرد که مفهوم خاص وجود «عدد موهومی یا مختلط بودن» را در نظر بگیریم. اگر پیش از این گمان می‌کردید چیزی میان همهٔ این مفاهیم خاص وجود هست، حالا با افزودن اعداد موهومی به دامنهٔ بحث، در این گمان پیشین تردید خواهید کرد زیرا براستی اعداد موهومی از جنس وجودی دیگر هستند و نمی‌توان آنها را با دیگر اعداد همکاسه کرد. اگر این‌را بپذیرید، من در قدم بعدی مدعی می‌شوم که آن دسته اعداد دیگر نیز به همین اندازه از همدیگر متفاوتند و این سوء تفاهم حاصل خطای روزمره ماست که می‌کوشیم برای ساده کردن امور شاخ و برگ‌ها را بزنیم.

به فرض اینهم که ما بتوانیم چیز مشترکی میان مفاهیم خاص «عدد طبیعی یا کامل بودن» و «عدد گویا بودن» و «عدد حقیقی بودن» و «عدد موهومی بودن» سراغ کنیم، با ملحوظ کردن مفاهیم خاص وجود در عالم محسوسات، بسختی بتوان آن مایهٔ مشترک میان مفاهیم بالا را در مفاهیم خاص وجود در عالم محسوس سراغ کرد. ملاصدرا و دیگر اساتید مکتب اصالت وجود براین باور هستند که قدرمشترکی بین همهٔ این مفاهیم خاص وجود، هست[1]. آنچه ما بر این دعوی می‌افزاییم این است که قدرمشترک میان همهٔ مفاهیم خاص وجود، همان عامترین مفهوم وجود، یعنی عدم است. این نکته در عرفان ایرانی و در اندیشهٔ ابن عربی تازگی ندارد. عرفان ایرانی مکرراً از فرآیند پویایی که از عدم به هستی و از هستی به عدم می‌راند سخن رانده و اصلا به قول مولوی

دیده‌ای کو از عدم آمد پدید ذات هستی را همه معدوم دید

2- انتزاع مفهوم عام وجود از موجودات، چه مزیتی برای ما خواهد داشت؟
حتی اگر هیچ اشتراکی میان مفاهیم خاص وجود نباشد، شاید انتزاع چنین مفهوم عامی، مایهٔ پیشرفت ما در فهم چیزها شود. من بر این گمانم که چنین ابتکاری جز مایهٔ سردرگمی نبوده و نخواهد بود.
3- برابر نهادن عدم با مفهوم عام وجود چه مزیتی برای ما خواهد داشت؟
نخستین مزیت این کار، رهایی از تناقض‌های مستتر در مفهوم عدم است. علاوه بر این، چنین تعبیر نوینی از عدم دریچه های نوینی به روی ذهن خواهد گشود و بسیاری از نارسایی‌های کنونی در علوم دقیقه رخت برخواهند بست.
گذشته از این، سابقهٔ تاریخیِ مفهوم صفر برای ما باید انگیزهٔ قویتری برای پرداختن به این مفهوم فراهم کند. چارلز سایفه می‌گوید ارسطو از مفهوم تُهی نفرت داشت. و این نفرت موجب دوری و پرهیز از مفهوم صفر در همهٔ فرهنگ‌هایی گشته بود که از افکار ارسطو متآثر بودند. حتی مسلمانان با پیشینهٔ تفکر شرقی، شدیداً آلوده به چنین گرایش منفی به مفهوم صفر بودند. فرهنگ هندی نشان داده بود که صفر تبلور عدم است و اگر قرار بود مسلمانان مفهوم صفر را بپذیرند، بطور چاره ناپذیری می‌بایست اندیشهٔ ارسطویی را پس می‌زدند. و این دقیقا همان چیزی بود که رویداد. وی می‌گوید[۲]:

«مسلمانان به اندیشه‌های اتمگرایان[۳] چنگ انداختند. حالا که صفر در دسترس آمده بود، مفهوم تُهی نیز مفهوم معتبری گشته بود. ارسطو از مفهوم تُهی نفرت داشت، در حالیکه اتمگرایان نیازمند این مفهوم بودند. کتاب مقدس از آفرینش جهان از عدم (یعنی از تُهی) گفتگو داشت، در حالیکه دیدگاه یونانی چنین امکانی را پس می‌زد. مسیحیت مرعوب فلسفهٔ یونانی، ارسطو را بر کتاب مقدس ترجیح داد. در حالیکه مسلمانان گزینهٔ مخالف را برداشتند. »

اگرچه دنیای مسیحیت در آغاز مفهوم صفر را پس زد، ولی قدرت رسوخ این مفهوم بصورت جبری تاریخی خودش را ـ هرچند با تآخیرـ از نو تحمیل کرد[۴]:

«حضیض ارسطو و عروج مفاهیم صفر و بی‌نهایت به وضوح پدیدار گشتند. موقع مساعدی برای ورود صفر به غرب فراهم گشته بود. در اواسط قرن دوازدهم نخستین نسخ «جبر و مقابله» خوارزمی در حال گشودن راه خود به اسپانیا، انگلیس و باقی اروپا بودند. صفر در راه بود ... »

«اسم» و مفهوم خاص وجود

چنانچه در یک زبان طبیعی کلمهٔ « وجود» نداشته باشیم به چه چیز دیگری می‌توان متوسل شد؟
در یک نگاه اجمالی بنظر می‌رسد کلمهٔ «اسم» بسیاری از بار معنوی «وجود» را دربرمی‌گیرد. «اسم» و «وجود» رابطهٔ تنگاتنگی دارند. ما برای هر موجودی اسمی داریم. درواقع کلمهٔ «موجود» را می‌توان مرحلهٔ مجردتری از «اسم» تلقی کرد. درهرحال در کلمهٔ «اسم» استعدادی نهفته است که می‌توان طی قراردادی با خواننده آن را به معنای «وجود» گرفت.
رابرت کپلن[۵] در گزارشی که از سیر تاریخی مفهوم صفر ارایه داده، بطور جنبی و گذرا اشاره به این دارد که ظاهراً اسم، به موازات (وحتی گاه بجای) وجود بکاررفته است. کپلن نوشتهء ارشمیدس را به یادمان می‌آورد که در آن ارشمیدس روی گزارهٔ « اعدادی که من نامگذاری کرده‌ام »[۶] تاکید خاصی دارد. بهمین سان نامهٔ «سن پل» به افیژنی حکایت مشابهی است که طی آن سن پل خداوند را ماورای هر اسمی قلمداد می‌کند.

پس ما در زبان طبیعی کلمه‌ای از همهٔ این مفاهیمِ خاص وجود انتزاع کرده و به آن اعتباری مصنوعی بخشیده‌ایم. ولی با انتزاع کلمهٔ وجود، ما به پیچیدگی ماجرا افزوده‌ایم و با کاربرد کلمهٔ «اسم»، از پیچیدگی این مبحث شدیدا خواهیم کاست. به عبارت دیگر، «اسم» گویای «مفهوم خاص وجود» می‌باشد.

بطور کاملا عمومی می‌توان گفت هر وجودی اسم است. عدم نیز اسم است. وقتی که ما برای چیزی اسمی نداریم، عدمش می‌نامیم. پس «عدم» اسمی عمومی است برای آن بخش از وجود که در تصور نمی‌گنجد. چنین تعریفی حتی دربرگیرندهٔ معدوم منطقی نیز می شود. مثلا مربعی که مستدیر باشد منطقا محال است، لاجرم به آن بخش از وجود تعلق دارد که در ادراک ما نمی‌گنجد. حالا مثل این است که زنجیر را از دست و پایمان باز کرده باشند. یکباره همهٔ بحث‌های پیچیدهٔ فلسفی عبث می‌نمایند. پرسش زیر را ملحوظ کنید: «آیا وجود، وجود دارد؟»

برگردان این پرسش به زبانی که مایل به قراردادش هستیم این است: «آیا اسم اسم دارد؟» همانطور که می‌بینید پرسش پیچیدهٔ پیشین، همهٔ پیچیدگی‌اش را از دست می‌دهد. عین این نکته در مورد پرسش آزاردهندهٔ بعدی صادق است: «آیا عدم وجود دارد؟» برگردان این پرسش به زبان ما چنین است «آیا عدم اسم دارد؟» خُب جوابش روشن است: بله اسم عدم، عدم است!

برای اینکه زبان‌مان را دقت بیشتری ببخشیم اصطلاح های زیر را قرارداد می‌کنیم:

تعریف: یک مفهوم خاص وجود را **اسم هستی** می‌نامیم. برای اینکه جای شک و شبهه‌ای باقی نماند اسم را به این صورت املا می‌کنیم: **ااسم** ودر عبارات ریاضی از نشان ❖ برای ااسم استفاده می‌کنیم.

تعریف: عامترین ااسم هستی را **نیستی** می‌نامیم.

ناگفته نماند که قرارداد واژگان ااسم هستی، سنخیتی نیز با تعبیر قرآنی از اسمای الهی دارد، به این معنی که اسمای الهی به مثابه مفاهیم خاص وجود، هر یک سازندهٔ مضامینی هستند که معرف بستر شعور و اندیشه‌اند. هر اندیشه یا کلامی، نیازمند به مضمونی است که در آن تحقق و معنی بیآبد. هر مضمونی را هم اسمی است که زایندهٔ آن مضمون محسوب می‌شود. برای مثال «عدد طبیعی بودن» یک ااسم هستی است که در مضمون پدیدآمده از آن همهٔ فرآیندهای حساب تحقق و معنی می‌یابد. این نکته نیز خالی از لطف نیست که در قرآن، مفهوم «اسم» در بسیاری موارد در مقام «وجود» به کار گرفته می‌شود. دعوت کتاب آسمانی به ذکر اسم خداوند را باید به معنای پرداختن به مقولهء «وجود» گرفت زیرا اندیشهٔ مداوم پیرامون مفهوم «وجود»، خواه ناخواه دریچهٔ ذهن را بسوی تجرید و معانی ماورای طبیعی می‌گشاید.

در استدلال‌های پیامبران با بت‌پرستان نیز، بگونهٔ صریح‌تری معنی «وجود» در اسم مستتر شده است. برای مثال «ای مشرکان این بت‌ها جز نام‌هایی که شما و پدرانتان بر آنها نهاده‌اید چیزی دیگر نیست (نجم@23) »، یا «آنچه غیر از خدا می‌پرستید اسماء بی حقیقت و الفاظ بی‌معنی است (یوسف@40)[۷] »

در مریم@7، همتایی و همانندی در وجود را در کنار همنامی قرار داده است «ای ذکریا همانا تو را به فرزندی که نامش یحیی است و از این پیش همنام و همانندش در تقوی نیافریدیم بشارت می‌دهیم»[۸]

نارسایی‌های نظریهٔ مجموعه‌ها

از تعریف و کاربستِ مفهوم مجموعه، در بنایی که کانتور پی‌ریخته است پارادکس‌هایی بیرون می‌جوشند. بسیاری از قضیه‌ها که مورد پذیرش جامعهٔ ریاضیدانان قرار گرفته، برمبنای نظریهٔ مجموعه‌ها قرار دارند. بدبختانه این مبانی، عاری از نارسایی نیست و دربردارندهٔ تضادهایی است. برای رفع این ناهمواری، راه‌هایی پیشنهاد شده که «نظریهٔ اصول گرای مجموعه‌ها»[9] یکی از آن‌هاست. این نظریه مبتنی بر این شناخت است که تضادهای نظریهٔ کانتوریِ مجموعه‌ها همه برجوشیده از مجموعه‌های «زیادی بزرگ» می‌باشد.

نظریهٔ کانتوری مجموعه‌ها را غالباً نظریه شهودی مجموعه‌ها می‌نامند زیرا در این نظریه، این پرسش به قوه شهودِ آدمی سپرده می‌شود که چه چیزی را باید مجموعه قلمداد کرد و چه چیزی را نباید مجموعه قلمداد کرد.

رابرت اِستول اصلِ نظریهٔ شهودی مجموعه‌ها را که میگوید ***هر خاصیتی معرّف مجموعه‌ایست***، سرچشمهٔ همهٔ تضادها قلمداد می‌کند[10]. به گفتهٔ وی درواقع چنانچه این اصل را بدون هیچ محدودیتی بکار ببندیم، دستِ کم به سه مجموعه‌ای می‌رسیم که از آنها تضادهای منطقی را می‌توان استنتاج نمود. این سه تضاد عبارتند از: تضاد راسل، تضاد کانتور، و تضاد بورالی فورتی.

پارادکس راسل هنگامی بروز می‌کند که ما بخواهیم مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هایی را مجسم کنیم که عضو خودشان نیستند[11]. ظاهرا چنین مجموعه‌هایی فقط وقتی عضو خودشان هستند که عضو خودشان نباشند! همان‌طور که پیداست از بطن چنین بیانی، تضاد بیرون می‌جوشد.

پارادکس راسل همچون تضادهای مهمِ دیگر از این موضوع بیرون می‌جوشد که بخواهیم همهٔ چیزهای برخوردار از یک صفت خاص را تحت پوشش یک مجموعه فراهم آوریم. یک مجموعهٔ معین یا بخودش تعلق دارد و یا ندارد. برای مثال مجموعهٔ مفاهیم ذهنی به خودش تعلق دارد در حالیکه مجموعهٔ تُهی به خودش تعلق ندارد (زیرا مجموعهٔ مفاهیم ذهنی، خود مفهومی ذهنی است پس خودش را می‌توان به عنوان یک مقولهٔ ذهنی، عضوِ خودش قلمداد کرد، در حالیکه مجموعهٔ تُهی طبق برداشت ریاضیدان‌ها دربرگیرندهٔ هیچ عضوی نیست پس لاجرم خودش را نیز دربر نخواهد گرفت). مجموعه‌ای که اعضایش از خصلتِ «مجموعه بودن» امتناع می‌ورزند از نوع دوم هستند (یعنی عضو خودشان نیستند). بگذارید اسم دومی را بگذاریم مجموعهٔ عادی. فرض کنید A مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های عادی است بقسمی که A فقط دربرگیرندهٔ مجموعه‌های عادی باشد. پس اگر a عضوِ A باشد پس a مجموعه‌ای خواهد بود که خودش را به عنوان عضو نمی‌پذیرد. حالا می پرسیم آیا A خود یک مجموعهٔ عادی است یا نه؟ فرض کنیم A مجموعهٔ عادی نباشد، یعنی A عضو خودش نخواهد بود. بنابر این A دربرگیرندهٔ عضویست که مجموعهٔ عادی نیست (یعنی خودِ A) و این در تضاد با این فرض است که A فقط دربرگیرندهٔ مجموعه‌های عادی باشد. پس این فرض که A دربرگیرندهٔ خودش به عنوان یک عضو است جایز نیست، به عبارت دیگر می‌توان به این نتیجه رسید که A برخلاف فرضی که گرفتیم، باید یک مجموعهٔ عادی باشد. ولی حتی این فرض هم ما را به تضاد راهنمون خواهد شد زیرا A باید بنا بر تعریفِ اعضاءِA، عضوی از A باشد (زیرا فرض گرفته‌ایم که A دربرگیرندهٔ همهٔ مجموعه‌های عادی است) پس A مجموعهٔ عادی نیست. لاجرم به یک تضاد منطقی رسیده‌ایم. پس در هر دو حال ما به تضاد می‌رسیم.

یکی از رایج‌ترین پارادکس‌هایی که از خویشاوندی نزدیک با پارادکسِ راسل برخوردار است، زمانی بیرون می‌جوشد که A مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های ممکن، را متصور شویم. در این‌صورت A ظاهراً بزرگترین و شامل‌ترین مجموعهٔ ممکن است ولی این تصور به مجرد اینکه مجموعهٔ توانِ A (می نویسیم $\Im(A)$ یعنی مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A) را درنظر بگیریم درهم می‌شکند و می‌دانیم که $\Im(A)$ بزرگتر از A است. از طرف دیگر فرض بر این بود که A هر مجموعهٔ ممکنی را دربربگیرد ولی دیدیم که $\Im(A)$ را دربرنگرفت. بدین سان است که در فرآیند چنین تصوری به تضاد می‌رسیم.

پارادکس کانتور را می‌توان در این بیان خلاصه کرد: مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها، مجموعهٔ توانی[۱۲] خودش می‌باشد. لاجرم عدد اصلی مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها باید از عدد اصلی خودش بزرگتر باشد! (عدد اصلی یک مجموعه، بیانگر اندازهٔ یک مجموعه است مثلا عدد اصلی مجموعهٔ 4 حرفی M={B,D ,K ,W} برابر 4 است)

تضاد بورالی فورتی وقتی بروز می‌کند که بخواهیم مجموعهٔ همهٔ اعداد ترتیبی را مجسم کنیم.

به ادعای ریاضیدانان پارادکس‌ها نمایانگرِ نادرست بودن این حکم هستند که به ازاء هر خاصیتی، مجموعه‌ای موجود است که دارای آن خاصیت می‌باشد. نکته جالب توجه اینجاست که معکوس آن هم از دیدگاه ریاضیات کلاسیک مردود قلمداد می‌شود، یعنی این حکم که برای هر مجموعه‌ای خاصیتی معرّف موجود است، از دیدگاه کلاسیک غلط می‌باشد. اثباتِ این نظر به شخصی بنام **اِسکولم** منسوب است..

نظریهٔ وجودی مجموعه

در تعریفِ مجموعه، گاه توافق عمومی بر سر «اعضاء یک مجموعه است» و گاه، سخن از خصلتِ معرّف می‌رود. هالت در شرح دشواری های مربوط به تعریف کانتوری مجموعه مینویسد:[۱۳]

«این تعریف کانتوری از مجموعه که قرار است همواره بصورت شییء یکتا در ذهن تحقق بیابد، خالی از مشکل نیست زیرا براستی بدشواری بتوان گردآیه‌ای متشکل از چند شییء را ، خود به یک شییء تبدیل کرد مگر اینکه به روابط و مناسباتِ اشیاء درون آن مجموعه متوسل شویم. کانتور خود بر این نکته واقف بود و این خصلت از مجموعه را بویژه در رابطهٔ با قدرت الهی توجیه می‌نمود که فرضاً خداوند قادر به این است که کلِّ مجموعهٔ اعدادطبیعی را بصورت شییء یکتا دریابد. »

بهتر است که در این حال تکلیف خود را با مفهومِ مجموعه بدین سان یکسره کنیم که دو نوع مجموعه مجسم کنیم:

تعریف: مجموعهٔ **عرضی** مجموعه‌ایست همچو S که از جمع آوری (گردهمآوری) اشیایی معین و قابل تمییز از یکدیگر به مثابه وجودی مفرد متشکل ازهمان اشیا که آنها را عضو یا عنصر مجموعه S می‌نامیم به وجود می‌آید.

تعریف: مجموعهٔ **وجودی**، مفهومی است که به یک دستهٔ خاص از جواهر[۱۴] (خصلت‌ها) اشاره دارد وپیش از هر خصلتی دربرگیرندهٔ **جوهرِ وجود** است.

پس مجموعهٔ عرضی، کم و بیش همان مجموعهٔ کانتوری است. در مجموعهٔ عرضی، آنچه ما را به فهمِ مجموعه رهنمون می‌گردد، اعضاء مجموعه است. در مجموعهٔ وجودی، خصلت یا خصایلِ معرّف همان نقشی را دارند، که در مجموعهٔ عرضی اشیاء آن دارند. به عبارت دیگر می‌گوییم:

مقصود از M_A مجموعهٔ عرضی است مشتمل بر اشیاء x_1 و x_2 و ...، و مقصود از M_J همان مجموعهٔ وجودیست که دربردارندهٔ جواهرِ $j_1, j_2, \ldots, j_n$ می‌باشد. به عبارت دیگر با این کار مایل هستیم که میان دو برخورد کمّی و کیفی، تمایز اساسی قائل شویم. در برخوردِ کمّی، باید همواره هشیار باشیم که با مجموعه‌های عرضی طرف هستیم، و در برخورد کیفی باید امیدوار باشیم که توسط مجموعه‌های وجودی، با بینشی اصالت وجودی، به بررسی جهان بپردازیم.

این دو مجموعه رابطهٔ تنگاتنگی با همدیگر دارند، تا آنجا که از چشم ریاضیدانان نیز پنهان نمانده ولی متأسفانه شناختِ این رابطه ، سرچشمهٔ هیچ جوششِ نظری اساسی نگردیده. مهم‌ترین نکته در رابطهٔ این دو نوع متفاوت از مجموعه، تناسب معکوس میان آنهاست. برای مثال به مجموعهٔ سیب‌های سرخ در جهان بپردازیم. برای این کار مجموعهٔ وجودی M_J را تصور می‌کنیم که دربردارندهٔ سه جوهرِ گوناگون می‌باشد:

الف: وجود داشتن

ب: سیب بودن

ج: سرخ بودن

یعنی $M_J = \{$وجود، سیب، سرخ$\}$ یک مجموعهٔ سه عضوی است.

اکنون در بازگشت به مثالِ سیب‌های سرخ به این نکتهٔ اساسی می‌رسیم که مجموعهٔ عرضی سیب‌های سرخ دارای اعضای بسیاریست (مقصود تعداد سیب‌های سرخی است که در جهان موجود هستند) اگرچه مجموعهٔ وجودی مربوط به آن صرفاً سه عضو دارد. حالا چنانچه به کیفیت‌های موجود در مجموعهٔ وجودی مذکور بیافزاییم، یعنی فرضاً سیب‌های سرخِ ایرانی را منظور کنیم، در این‌صورت مجموعهٔ وجودی‌مان چهار عضوی خواهد شد، یعنی:

$M_J = \{$وجود، سیب، سرخ، ایرانی$\}$

در حالیکه از تعداد اعضاء مجموعهٔ عرضی، شدیداً کاسته خواهد شد زیرا فرضاً مجموعهٔ عرضی‌مان دیگر مشتمل بر سیب‌های هندی و سمرقندی و ... نخواهد شد. پس تناسبِ معکوسی میان این دو مجموعه برقرار است. چنانچه بر جواهرِ مجموعهٔ وجودی بیافزاییم، از تعداد اعضاء مجموعهٔ عرضی خواهیم کاست.

نظریهٔ مجموعه‌ها که در چهارچوب نوین علم بدنیا آمده، فاقد زمینهٔ فکری ضروری برای درک و بسط مفهوم «صفر» است. حضور مجموعهٔ تُهی ، گاه چون وهمی بی اساس می‌نماید، و اصولاً برای ارضاء کمبودِ معادلات بوجود آمده است. از همین روست که پارادکسِ مجموعهٔ مجموعه‌ها، یا تضادهای دیگر بر تختِ اندیشه می نشیند. فرانکل خود در کتابِ «معرفی نظریهٔ مجموعه‌ها» اذعان دارد[۱۵]:

«به دلایل صرفِ ساختاری، جهت اینکه بتوان برخی روابط و مناسبات را راحت‌تر و ساده‌تر توضیح داد، مجموعه‌ای معرفی می‌کنیم که آن را مجموعهٔ تُهی می‌نامیم. این مجموعه بدین سان تعریف می‌شود که دارای هیچ عضوی نیست. »

تعریفِ غالب (از مفهوم مجموعه) در نظریهٔ مجموعه‌ها همان تعریفِ کمّی است که برای تبیینِ مجموعه، به اشیاء **درونِ آن** روی می‌آورد. در راهی که ما در پیش گرفته‌ایم، مجموعهٔ وجودی، معرّفِ مجموعهٔ عرضی است، لاجرم مفهوم مجموعهٔ عرضی وابسته به (یا متأخر به) کیفیات تعریف شده در مجموعهٔ وجودی است و مستقل از آن نیست.

چنانچه ما به جواهرِ مجموعهٔ وجودی بیافزاییم، از اندازهٔ مجموعهٔ عرضی مربوطه خواهیم کاست. فرضاً افزایش جوهر پنجمی همچو خوش‌بویی به مجموعهٔ بالا، از تعدادِ سیب‌ها در مجموعهٔ عرضی خواهد کاست، زیرا همان‌طور که پیداست هر سیبی خوش‌بو نیست. اگر به این فرآیندِ افزایشِ جواهر ادامه دهیم، به جایی می‌رسیم که مجموعهٔ عرضی مربوط به آن خالی خواهد بود، زیرا چیزی که دربردارندهٔ همهٔ آن جواهر باشد، نمی‌توان یافت. پس مجموعهٔ عرضی تُهی از دلِ مجموعهٔ وجودی بیرون می‌جوشد که خود تُهی نیست، بلکه دربردارندهٔ همهٔ جواهر می‌باشد (اسمش را بگذاریم مجموعهٔ وجودی کیهانی).

از طرف دیگر چنانچه از خصلت‌ها و جواهرِ مجموعهٔ وجودی بکاهیم، طبعاً بر تعدادِ اعضاء مجموعهٔ عرضی می‌افزاییم. اگر به روندِ کاهش ادامه دهیم، به نقطه‌ای می‌رسیم که مجموعهٔ وجودی، دربردارندهٔ هیچ جوهری سوای جوهرِ وجود، نخواهد بود. در چنین حالتی، مجموعهٔ عرضی مربوط به آن، دربرگیرندهٔ همهٔ گیتی خواهد بود (به عبارت دیگر همان مجموعه کیهانی[۱۶] خواهد بود). در اینجا لازم به یادآوری است که این تهیگی، تُهی مطلق نیست بلکه دربردارندهٔ خصلتی است که در تعریفِ مجموعهٔ وجودی مستتر است و آنهم خصلتِ وجود است. چنانچه مجموعه‌ای دارای این خصلت نباشد، اصلاً در ذهن نخواهد گنجید. این همان مفهومی از «نیستی» است که ما به آن نظر داریم. خصلتِ وجود، عضو جدایی ناپذیر از مجموعهٔ وجودیست. اصلاً بهتر است که آن را عضو نیانگاریم بلکه جوهرِ هستی را در مفهوم مجموعهٔ وجودی مستتر بدانیم. در پرورش مفهومِ یک مجموعه از هر خصلتی می‌توان دست شست ولی از خصلت وجود نمی‌توان گذشت. این مفهومِ وجودی یک مجموعه است که با انصراف از آن از کلِّ معنای مجموعه دست باید شست. پس یک مجموعهٔ تُهی در این جوهر با هر مجموعهٔ وجودی دیگری اشتراک دارد. بگذارید جوهر وجود را از زین پس با این علامت نشان دهیم:

❖ پس در این‌صورت داریم: $\varnothing_j = \{❖\}$

یعنی مجموعهٔ تُهی وجودی، مجموعه‌ایست که فقط دربردارندهٔ جوهر وجود است.

ادعای بالا را که گفتیم مجموعهٔ وجودیِ تُهی معرّف مجموعهٔ کیهانی عرضی است، اینطوری نشان می‌دهیم

$\Omega \leftrightarrow \varnothing_j$ (در اینجا دست چپ مجموعهٔ وجودی و دست راست مجموعهٔ عرضی مربوطه به آن است)

دعوی دیگرمان را که گفتیم مجموعهٔ همهٔ جوهرهای ممکن، معرف مجموعهٔ عرضی تُهی است اینطوری نشان می‌دهیم: $\varnothing \leftrightarrow \Omega_j$

این تعریف از مجموعهٔ وجودیِ تُهی، بیانگر مفهومی از نیستی است که ما به آن نظرداریم. این مجموعه‌ایست که مجموعهٔ عرضی مربوط به آن، دربردارندهٔ کُلِّ هستی است زیرا جوهر وجود اشاره به کل هستی دارد. بدین سان از دلِ مجموعهٔ وجودیِ تُهی، همان مجموعه‌ای بیرون می‌جوشد که خود منشأ بسیاری از تضادهاست. مجموعهٔ تهیِ وجودی ضامنِ معنای مجموعهٔ مجموعه‌هاست.

اعمال جبری میان جواهر

عملِ منطقی «و» میان جواهر، یا به عبارت دیگر اشتراک $\cap$ در مجموعه‌های وجودی، در مثالی که زدیم مستتر بود. وقتی می‌گوییم مجموعهٔ سیب‌های سرخ، درواقع دو جوهرِ « سیبی» و « سرخی» را با پیوندِ منطقی «**و**» ترکیب می‌کنیم. این عمل رایج‌ترین عمل در میان جوهرهاست. فرضاً M_1 مجموعهٔ پیراهن‌های سرخ را در نظر بگیریم، دراین‌صورت اشتراکِ M_1 با مجموعه سیب‌های سرخ M_2 در جوهرِ سرخی خواهد بود:

$M_1 \cap M_2 =$ سرخی

هراندازه که فهمِ عملِ منطقی **«و»** بر ذهن آسان است، به همان اندازه دریافتِ عملِ منطقی **«یا»** دشوار است. بر همه روشن است که از «سردی **و** گرمی» چیزی شبیه به ملایمت بیرون می‌جوشد، یا دستِ‌کم این انتظار از چنان ترکیبی می‌رود، ولی مقصود از «سردی **یا** گرمی » چیست؟ آیا از عملِ منطقیِ **«یا»** میان دو جوهر، جوهر سومی سربرمی‌زند؟ اگر جوابِ این پرسش مثبت است، براستی این چه جوهریست؟ از ترکیبِ «سردی **یا** گرمی » هیچگاه نمی‌دانیم با کدامیک از آن دو جوهر روبرو خواهیم بود، ولی حقیقت این است که می‌توان با اطمینان گفت جوهرِ سومی درکار نیست، بلکه از این ترکیب همواره یکی از دوشقِ «سردی **یا** گرمی » سر بیرون خواهد آورد. درواقع می‌توان گفت طی این عملِ منطقی، فقط از میزان قطعیتِ موضوع می‌کاهیم و فعل قطعی را به مقام قوه‌ای از میان دو قوهٔ «سردی» **یا** «گرمی » کاهش می‌دهیم. در«سردی **و** گرمی» با قطعیت روبرو هستیم، می‌دانیم که برآیند این دو نه سرد خواهد بود و نه گرم، بلکه وجودی قطعیست که عدم شناخت ما از آن، چیزی از قطعیت‌اش نخواهد کاست. در حالیکه در «سردی **یا** گرمی » با چنین پدیده‌ای روبرو نیستیم. درواقع اگر به زبان حساب احتمالات گفتگو کنیم، شرط تحقق جوهرِ سوم در مثالِ «سردی **و** گرمی » برابر با 1 است (یعنی قطعی است) در حالیکه شرط تحقق هریک از دو جوهر سردی، گرمی در مثالِ «سردی **یا** گرمی »، فقط برابر با نیم می‌باشد. پس در اجتماعِ دو جوهر، ما میزان امکانِ وجود را به دو نیم کرده‌ایم. چنانچه گفتگو از مجموعهٔ دیگری را نیز به میان کشیم و عملِ اجتماع را گسترش دهیم متوجه حقیقتِ شگرفی خواهیم شد: هرچه بر تعدادِ جواهر در عملِ اجتماع بیافزاییم، از میزان امکانِ وجود میان آنها می‌کاهیم و این کاهش متناسب با تعدادِ آن جواهر می‌باشد. درواقع این کاهش، همواره متناسب با افزایشِ امکانِ وجودِ جوهر دیگریست. بدین ترتیب می‌توان به سادگی مدعی شد که در عملِ اجتماع، از ترکیب دو یا چند مفهوم، همواره مفهومِ کلّی‌تری انتزاع خواهد شد. اجتماعِ دو مجموعهٔ وجودی { سیبِ بزرگ، ❖ }$=M_1$ و { سیبِ کوچک،❖ }$=M_2$ را درنظر بگیرید، در این حالت مفهوم کلی‌تر سیب را انتزاع خواهید کرد. این موضوع علیرغم پوشیدگی‌اش همواره صادق است. برای مثال از اجتماعِ دو جوهرِ «میز» و «سیب سرخ » نیز مفهوم کلی‌تری انتزاع می‌شود که موهوم است، یعنی دردسترس ذهن نیست، برایش اسمی موجود نیست ولی در کلّی‌تر بودنش هیچ شکی نیست.

اکنون با این نکتهٔ تکان دهنده روبرو هستیم که **اجتماع یا اشتراکِ همهٔ جواهر و همهٔ مجموعه‌های وجودی، همواره به مجموعهٔ تهی می‌انجامد.** یعنی همان‌گونه که در فلسفهٔ اصالت وجود مکرراً یادآوری شده، **وجه اشتراک موجودات و وجه تمایز آنها در خود وجود مستتر است**[۱۷]، به همان سان اشتراک همهٔ جواهرممکن عین اجتماع همهٔ جواهر ممکن می‌باشد. برای روشن شدنِ قطعی موضوع، به مثال رنگ‌ها روی می‌آوریم: برای اشتراکِ همهٔ رنگ‌ها البته با بی‌رنگی یا جوهرِ عمومی « رنگ » روبرو می‌شویم زیرا چیزی سراغ نداریم که در آنِ واحد هم بتواند آبی باشد و هم سرخ هم قهوه‌ای هم سبز و ... لاجرم اشتراکِ همهٔ رنگ‌ها همان جوهر کلی « رنگ » است که در هرکدام از آنها مستتر است. از طرف دیگر اجتماعِ همهٔ این جواهر نیز باز به همان جوهرِ کلی « رنگ » خواهد انجامید زیرا از پیوند « آبی یا سبز یا زرد یا قهوه‌ای یا ...» جوهرِ کلّی‌تری که همان جوهرِ رنگ است عاید ما خواهد شد. این نکتهٔ مهمی است و جوهر تمایز اساسی میان این نظریه و نظریهٔ کلاسیک مجموعه‌ها بر این تمایز استوار است. دیدگاه اصالت وجودی حکم می‌کند که اجتماع و اشتراک در غایت به نقطهٔ واحدی بیانجامند، این نقطهٔ واحد، همان هستی است. خواننده بر این نکته واقف باشد که در مثالی که زدیم، جهان را به جهانِ رنگ‌ها محدود کردیم، و درچنان مضمونی، البته جوهرِ « رنگ » معادل با جوهر «هستی ❖ » خواهد بود. تمایز میان اجتماع و اشتراک در اعمالِ محدودِ منطقی است: اشتراک سبز و آبی به جوهرِ آبی می‌انجامد که درهردوی آنها موجود است. ولی اجتماع سبز وآبی به جوهرِ کلی‌تری که هم اشاره به

آبی بودن دارد می‌کند، و هم اشاره به سبز بودن ولی چنانچه این اعمال بطوری نامحدود روی همهٔ جواهر موجود (دراین مثال رنگ‌ها) صورت بگیرد، حاصل این اعمال مستقل از اینکه اجتماع ملحوظ بوده یا اشتراک، یکی خواهد بود. این موضوع بازدارندهٔ پارادکسِ «مجموعهٔ مجموعه‌ها» در قلمروی مجموعه‌های وجودی است. زیرا مجموعهٔ مجموعه‌ها، خواه بر عملِ اشتراک مبنی باشد و خواه بر اجتماع، همواره به مجموعهٔ تهی می‌انجامد و در هر حال اشاره به کلّ هستی دارد.[۱۸]

حل پارداکس‌ها از دید نظریهٔ وجودی

اکنون با مقدماتی که فراهم آورده‌ایم، به سراغ پارادکس‌های نظریه کلاسیک مجموعه‌ها می‌رویم و آنها را از دید نظریهٔ وجودی مجموعه‌ها بررسی می‌کنیم.
در مضمون خاصی که از یک مفهوم خاص وجود پیدا شده، هرآنچه را که در تعریف مفهوم خاص وجود نمی‌گنجد، برابر با عدم می‌گیریم. برای اینکه موضوع روشنتر شود به مثال اعداد بازمی‌گردیم و می‌گوییم اگر مفهوم خاص وجود را برابر با «عدد طبیعی بودن» بگیریم، پس عدد کسری همچون $\frac{1}{3}$ یا عددی گنگ همچون $\sqrt{2}$ در این مفهوم گنجیدنی نیست. لاجرم اعداد کسری از دید این مجموعه برابر با صفر هستند. از طرف دیگر می‌دانیم که $\frac{1}{3}$ یا $\sqrt{2}$ حقیقتا معنایی خلاف صفر دارند ولی چون معنایشان بر مفهوم خاص دیگری از وجود استوار است، از اینروست که درمضمون عددطبیعی بی‌معنی هستند. به عبارت دیگر برما روشن است که صفر نمودار همهٔ آن مفاهیم دیگر، از وجود است که با «عددطبیعی بودن» جمع یا بیان نمی‌شوند.
تاکنون از دعوی هسته‌ای نظریهٔ وجودی دوری کرده‌ایم زیرا برای به کرسی نشاندن این دعوی نیازمند به بحث پیرامون وجود بودیم. این دعوی از این قرار است که به ازاء هر مجموعهٔ عرضی می‌توان مجموعه‌ای وجودی متصور شد و بالعکس. این موضوع از دیدگاه نظریه پردازان مایهٔ دردسر شده و به گفتهٔ ایشان بسیاری از پارادکس‌ها را مدیون چنین ادعایی هستیم. استدلال ایشان چنین است:

الف ـ به از اء هر مجموعهٔ عرضی، مجموعه‌ای وجودی موجود است.

رد این حکم به استدلال اسکولم بازمی‌گردد که می‌گوید[۱۹]:

*می‌توان مجموعهٔ اعداد حقیقی را روی گردآیهٔ مجموعه‌هایی به شیوه‌ای **یک به یک** تصویر کرد. برای مثال برای هر عدد حقیقی همچو x می‌توان مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی کوچک‌تر از x را به مثابه تصویرِ آن مجسم کرد. یعنی:*

مثلاً $f(4)=\{1,\ldots,3\}$ مشتمل بر همهٔ اعداد حقیقی مابین 1 تا 3 می‌باشد.

از آنجایی که مجموعهٔ اعداد حقیقی بی‌شمار است، بنابر این تعداد بی‌شماری از مجموعه‌ها نیز موجود خواهند بود. اکنون اگر هر مجموعه‌ای دارای یک خصلت معرّف است، پس مجموعهٔ خصایلِ معرّف، بی‌شمار است. از طرف دیگر وقتی که یک خصلت را می‌نویسیم همواره با دنبالهٔ محدودی از کلمات (به هر زبان طبیعی که بخواهید تصور کنید) طرف هستیم. مجموعهٔ همهٔ چنان دنباله‌هایی شمارش پذیر می‌باشد به قسمی‌که بویژه مجموعهٔ همهٔ خصایل، شمارش پذیر می‌باشد. لاجرم باید مجموعه‌هایی موجود باشند که برایشان خصلت معرّف نتوان یافت.

بند نخست این استدلال هیچ ایرادی ندارد، یعنی می‌توان به ازاء هر عدد حقیقی، وجودی متصور شد و به این حساب به تعداد بی‌شماری از جواهر رسید. ولی نتیجه‌ای که می‌گیرد غلط است. یعنی مجموعهٔ خصایل معرف (به زبان آنها) یا مجموعهٔ همهٔ جواهر (به زبان ما) مجموعه‌ای نیست که به سبک و سیاق مجموعهٔ کانتوری، کیسه یا فضایی تلقی شود که تک تک جواهر را درون آن می‌ریزند. به عبارت دیگر اگر ما مفهوم خاص وجود را بر مبنای «عدد حقیقی بودن» گرفته‌ایم، (در ریاضی مجموعهٔ اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نشان میدهند، و برای مفهوم خاص وجودش مینویسیم «عدد $\mathbb{R}$ بودن» = $❖_{\mathbb{R}}$)، صد البته می‌توان تعداد بی‌شمار مفاهیم خاص‌تر بر این مبنا یافت. ولی همهٔ این مفاهیم نسبت به $❖_{\mathbb{R}}$ خاص‌ترند و لاجرم همه در آن مستتر هستند! زیرا همان‌طور که پیش از این شرحش رفت مجموعهٔ این جواهر همه در مجموعهٔ $❖_{\mathbb{R}}$ مستتر است. جوهر وجود دربرگیرندهٔ همهٔ جواهر ممکن است. و همان‌طور که پیداست مجموعهٔ $❖_{\mathbb{R}}$ به هر زبانی که بیان شود نیازمند به هیچ زنجیرهٔ بی‌شمار از الفبا نخواهد بود زیرا فراموش نکنید که مفاهیم خاص وجود، بانی مضمون تفکر و اندیشه و زبان هستن. مفاهیم خاص وجود (یا ااسامی هستی) خصلت زایشی دارند: هر مفهومی در مضمونِ برساخته از یک مفهوم خاص وجود، از دل آن مفهوم خاص بیرون میجوشد. با عبارت دیگر، یک مفهوم خاص وجود زایندهٔ بیمشار مفاهیم در مضمون خودش میباشد. همهٔ نکتهٔ اصالت وجود در همین است که مدعیست مفهوم وجود زایندهٔ همهٔ مفاهیم دیگر است. البته میتوان با اصالت وجود توافق نداشت ولی این نوشته براساس توافق اصولی با اصالت وجود پرداخته شده و من صرفا در این جا مدعی شده ام که اثبات اسکولم در چارچوب اصالت وجود رنگ میبازد.

ما در $❖_{\mathbb{R}}$ با یک ااسم هستی روبرو هستیم، لاجرم باید از نو به خود یادآوری کنیم که ااسامی هستی سازه‌های هر زبانی خواهند بود که ما برای توصیف چیزها به آن روی می‌آوریم. ناگزیر نباید توقع این را داشت که این ااسامی هستی توسط چیزی دیگر توصیف شوند. یک ااسم هستی توصیف شدنی نیست، بلکه بعکس، ما برای توضیح و شناخت چیزها به ااسامی هستی متوسل می‌شویم. به عبارت دیگر بند دوم استدلال اسکولم بشدت با جهان‌بینی ارایه شده در این نوشته ناسازگار است.

ب ـ به ازاء هر مجموعهٔ وجودی، مجموعه‌ای عرضی موجود است.

نظریه پردازان نظریهٔ مجموعه‌های کانتوری (عرضی) بر علیه حکم بالا قیام کرده و مدعی هستند که کاربست این حکم ما را به تضادها (پارادکس‌های) زیر رهنمون خواهد شد:

تصاد راسل

در پارادکس راسل مغلطه‌ای صورت گرفته است. ما در اینجا با این خطای روشن روبرو هستیم که مرز میان دو مجموعهٔ عرضی و وجودی مخدوش شده! پیداست است که مجموعهٔ عرضی نمی‌تواند عضوی از مجموعهٔ وجودی باشد و بالعکس! بگذارید به این مثال بچسبم: اگر مجموعهٔ اعداد زوج را مجسم کنیم، باید هشیار باشیم که از طرفی مجموعهٔ وجودی زیر را داریم $j_{\mathbb{Z}_2} = \{❖_{\mathbb{Z}}, j_2\}$ و از طرف دیگر مجموعهٔ عرضی زیر را داریم: $\mathbb{Z}_2 = \{\cdots,-4,-2,0,2,4,\cdots\}$ همان‌گونه که از تعاریف اساسی ما برمی‌آید $\mathbb{Z}_2$ قرار نیست که عضوی از $j_{\mathbb{Z}_2}$ باشد. به عبارت دیگر مغلطه‌ای که در بالا صورت گرفته عبارت از این است که جوهردوگانگی بیانگر یک ویژگی یا جوهراست، در حالیکه $\mathbb{Z}_2$ بیانگر مجموعه‌ای عرضی است که از آن جوهر زائیده و تعریف و حادث گشته!

به این مثال دقت کنید: وقتی می‌گوئیم «مجموعهٔ گل‌های خوشبو»، در این صورت یک مجموعهٔ وجودی داریم که دو جوهر «گل بودن» و «خوشبو بودن» رادربرگرفته. یک مجموعهٔ عرضی هم داریم که مانند کیسه‌ای همهٔ گل‌های خوشبوی جهان را دربرگرفته. البته پیداست که مجموعهٔ عرضی مذکور، گل نیست و بو

هم ندارد بلکه یک مجموعه است و بس. ولی مجموعهٔ وجودی گل‌های خوشبو، هم کیفیت «گل بودن» دارد و هم کیفیت «خوشبو بودن» و هم کیفیت «مجموعه بودن» را دربرگرفته، لاجرم خودش عضو خودش است.
مثال عمومی پارادکس راسل مجموعهٔ مجموعه‌هاییست که عضو خودشان نیستند. آیا چنین مجموعه‌ای خودش را دربرمی‌گیرد؟
بگذارید برای چنین مجموعه‌هایی اسمی بگذاریم، اسم چنین مجموعه‌ای را می‌گذاریم «کج». یعنی مجموعهٔ کج مجموعه‌ایست که خودش را دربرنگیرد. حالا می‌پرسیم آیا مجموعهٔ مجموعه‌های کج خودش کج است یا راست؟ اگر کج است پس خودش هم خودش را دربر خواهد گرفت پس لاجرم راست است و این تضاد است. و اگر راست است پس خودش را هم دربر می‌گیرد و لاجرم کج خواهد بود و این هم تضاد است.
چنین تضادی صرفاً قابل اطلاق به مجموعهٔ عرضی است. این تضاد در قلمروی نظریهٔ کلاسیک مجموعه‌ها قابل حل نیست. مشکل از کجا برمی‌خیزد؟ بقول هالت و راسل و فرانکل، مشکل اساسی در خود مفهوم مجموعه است. من نیز در تمایز اساسی میان مجموعهٔ عرضی و مجموعهٔ وجودی به نکتهٔ فضایی بودن مجموعهٔ عرضی (کانتوری) اشاره کردم. در حقیقت دشواری در همین مقولهٔ فضایی بودن مجموعهٔ کانتوری و مفهوم «تعلق» مربوط به آن است. مادامی که تعریف ما از یک مجموعه به سبک و سیاق کانتور فضایی باشد، به ناگزیر باید به مفهوم تعلق فضایی به معنای «درون چیزی بودن» متوسل شویم و همین سرچشمهٔ همهٔ تضادهاست. زیرا در عرصهٔ معنی، یا به عبارت دیگر در عرصهٔ مفاهیم وجودی، مقولهٔ تعلق از باب «استتار عام در خاص » است و سراپا با مفهوم تعلق فضایی تفاوت دارد. درواقع می‌توان گفت تناسب معکوسی میان آنهاست. یعنی اگر برای دو مجموعهٔ عرضی M_1 و M_2 تعلق کانتوری $M_1 \subset M_2$ صدق کند (یعنی اگر M_1 زیرمجموعهٔ M_2 باشد قطعاً برای مجموعهٔ وجودی زایندهٔ آنها رابطهٔ معکوس $j_{M_1} \supset j_{M_2}$ صدق خواهد کرد. زیرا M_1 خاص‌تر از M_2 است و خاص دلالت بر عام دارد. مثال «گل سرخ» را ملحوظ کنید. مجموعهٔ عرضی «گل سرخ» زیر مجموعهٔ «مجموعهٔ گل» است زیرا طبعا بخشی از گل‌های دنیا سرخ هستند. ولی وقتی مجموعهٔ وجودی «گل سرخ» را ملحوظ کنیم می‌بینیم که «مجموعهٔ وجودی گل سرخ» (یعنی j_{M_1}) نسبت به «مجموعهٔ وجودی گل» (یعنی j_{M_2}) خاص‌تراست. زیرا گل سرخ دلالت بر «گل بودن» دارد. این تعلق از دید کانتوری (عرضی) معکوس است زیرا تعلق فضایی حکم می‌کند که j_{M_2} زیرمجموعهٔ j_{M_1} باشد، درحالیکه از دید وجودی چنین نیست. صاحب نظری در انتقاد به این شیوه استدلال بالا مدعی گشت که در مثال راسل معنای تعلق را باید درنظر گرفت نه زیرمجموعه. دیدم که این نکته بسیار فریبنده است. لاجرم اشاره به تفاوت معنای تعلق و زیرمجموعه را ضروری میبینم: مجموعه M را تجسم کنید متشکل از x بقسمی که x یکی از اعداد زیر باشد: 1و2و5

مجموعهٔ N را تجسم کنید متشکل از X بقسمی که X یکی از اعداد زیر باشد: 1و2
حالا دوگونه میتوان رابطهٔ تعلق را ملحوظ کرد: فضایی یا وجودی. معنای فضایی این است که هر مجموعه ای را بمثابه کیسه ای تجسم کنیم که آن اعداد را دربربگیرد. در این حالت البته مجموعهٔ N درون مجموعهٔ M است پس زیرمجموعهٔ آن است. اگر رابطهٔ تعلق (و نه رابطهٔ زیر مجموعه) مربوطهٔ هریک از آنها را با Em و En نشان بدهیم چندان دور از ذهن نیست که بگوییم رابطهٔ En مستتر در Em است. یعنی یکی از اعداد 1و2 بودن مستتر در یکی از اعداد 1و2و5 بودن است. این نکته در مورد تعلق وجودی ولی صادق نیست. تعلق وجودی میگوید ما جوهری داریم به نام "یکی از سه عدد 1و2و5 بودن". این جوهر را ما توسط operator منطقیِ "یا" میان سه جوهر "یک بودن" و "دو بودن" و "پنچ بودن" تعریف کرده ایم. و در بالا بحثی در رابطه با این ارایه داده ام که عمل "یا" میان جواهر به جوهر عمومیت یافته تری میرسد. به اینسان ما در هر یک از آن دو

مجموعه دو جوهر داریم که از عمل منطقی میان جواهر ساخته شده اند. و روشن است که جوهر اولی (مربوط به M)عمومی تر است از جوهر دومی. لاجرم مجموعۀ وجودی N خاصتر است از M. و خاص دلالت برعام دارد. درست است که رابطۀ تعلق و رابطۀ زیرمجموعه یکی نیستند، ولی اتفاقا این ناهمسانی وقتی تبلور میکند که تعلق وجودی ملحوظ شود. راسل خود در شرح اختلاف نظر intionalism و extentionalism به این دعوی اشاره دارد که محمول معرّف مجموعۀ (کلاسِ)بزرگتر جزیی از محمول معرّف مجموعۀ (کلاسِ) کوچکتر است. و راسل این دعوی intentionalism را قابل دفاع تر از دعاوی extentionalism قلمداد میکند[20] ولی به نوبۀ خود دلایلی بر رد برخورد intentionalism مطرح کرده که بحث آن حوصله ای بیشتر از این مقاله میطلبد. راسل و دیگران برخورد دوگانه دارند. وقتی تعلق از نوع فضایی باشد، آنوقت رابطۀ زیرمجموعه هم از رابطۀ تعلق تبعیت میکند. وقتی که رابطۀ تعلق از جنس فضایی نباشد آنوقت رابطۀ زیرمجموعه از آن تبعیت نخواهد کرد.

در مثال مجموعۀ کج، وقتی مجموعۀ وجودی آنها را متصور می‌شویم هیچ تضادی در میان نخواهیم دید. برای چنین مجموعه‌ای، مجموعۀ وجودی سراغ داریم که زایندۀ همۀ مجموعه‌های کج است و البته خودش را نیز دربر می‌گیرد به این علّت که دو جوهر «مجموعه بودن» و«کج بودن» را دربرمی‌گیرد. یعنی تعلق در این مجموعه براساس ردیف جواهر تعریف می‌شود وبس.

هرآنچه که حادث شدنی است با معنی است و هرآنچه که بی‌معنی است بروی عدم خواهد افتاد. وقتی می‌بینید که براستی مجموعه‌های عرضی وجود دارند که عضو خودشان نیستند، پس قطعاً جوهر «کج بودن» جوهر بی‌معنایی نیست! و هر چه که بامعنی است نمی‌تواند زایندۀ پارادکس باشد. در عوض موجودی بی‌معنی ، مانند «مربع مستدیر» محال است که حادث شود (مجموعۀ عرضی برایش نخواهی یافت) و قطعاً حدوث آن را باید در عدم ـ یا مفهوم عام وجود ـ جستجو کرد. و در چنین حالتی نیز با پارادکس روبرو نخواهیم شد زیرا عدم دربرگیرندۀ عدم هم هست! یعنی عدم خودش را دربرمی‌گیرد.

تضاد کانتور

اکنون می‌رسیم به دستۀ دیگری از تضادها که بقول نظریه پردازانِ کلاسیک، از کاربست حکم انتزاع بیرون می‌جوشند.

پارادکس کانتور از این عبارت بیرون می‌جوشد: X یک مجموعه می‌باشد

یعنی چنانچه عبارت بالا را به مثابه خصلت معرف (یا جوهر) بگیریم، درآن‌صورت به مجموعه‌ای می‌رسیم که بازتابندۀ پارادکس است. استدلال اساتید از این قرار است:

فرض کنیم که Ω مجموعه‌ایست که توسط عبارت بالا بنا شده. بنابر این Ω مجموعه‌ایست متشکل از همۀ مجموعه‌ها. می‌دانیم که عدد اصلی مجموعۀ توانی متعلق به Ω (مینویسم $\Im(\Omega)$ یعنی مجموعه‌ای که هم Ω را دربرمی‌گیرد و هم همۀ زیرمجموعه‌های Ω را) بنا بر قضیۀ کانتور بزرگتر است از عدد اصلی مجموعۀ Ω یعنی $\overline{\overline{\Im(\Omega)}} \succ \overline{\overline{\Omega}}$

ولی نظر به اینکه Ω خود مجموعۀ همۀ مجموعه‌هاست و مجموعۀ توانی آن نیز یک مجموعه است) بنابر این $\Im(\Omega) \subseteq \Omega$ پس خواهیم داشت: $\overline{\overline{\Im(\Omega)}} \le \overline{\overline{\Omega}}$

(یعنی عدد اصلیِ مجموعۀ توانی کوچکتر یا مساوی عدداصلیِ Ω می‌شود) و این در تضاد با نتیجه بالاست.

برای درک خطای کانتور کافی است که یادآوری کنیم که مقصود از مجموعهٔ توانی یک مجموعه چیست؟ بنابرتعریف اگر مجموعهٔ A عبارت باشد از $A=\{1,2,3\}$ در این صورت مجموعهٔ توانِ A برابر است با $\Im(A)=\{A,\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1\},\{2\},\{3\},\varnothing\}$ یعنی مجموعهٔ توانِ A متشکل از همهٔ مجموعه‌های ممکنی است که بشود از ترکیب اعضای A ساخت. در این مثال عدداصلی A برابر با 3 است و عدداصلی $\Im(A)$ برابر با 8 است.

تا اینجا همه مربوط می‌شود به مجموعهٔ عرضی. حالا بیایید از زاویهٔ دید وجودی به موضوع نگاه کنیم. برای مجموعهٔ A باید گفت که ما وجودی داریم تحت عنوان «عضوی از A بودن» که آن را با j_A نشان می‌دهیم (در این مثال، مقصود از در A بودن، یکی از سه عدد 1و2و3 بودن است) حالا وقتی $\Im(A)$ را نگاه می‌کنیم می‌بینیم از نظر وجودی حادثهٔ بزرگی رویداده: چنانچه جوهر مجموعهٔ توانِ A را با $j_{\Im(A)}$ نشان دهیم در یک نگاه درمی‌یابیم که $j_{\Im(A)}$ جوهر عمومیت یافته‌ای از j_A است. برای اینکه فرآیند عمومیت بخشیدن فراموش نشود باردیگر یادآوری میکنم: هرگاه که ما از عمل منطقی "و" میان جواهر استفاده میکنیم، جوهر خاصتری احداث میشود. هرزمان که از عمل منطقی "یا" میان جواهر استفاده کنیم آنوقت جوهر عمومی تری احداث میشود. همانطور که شرحش رفت من مکانیزم عمومیت یافتن را در کاهش امکان وجود توصیف کردم. در مجموعه توانی در مثال بالا، ما با بکاربستن عمل منطقی "یا" میان همهٔ زیرمجموعه ها، به همین عمومیت بخشیدن روی آورده ایم.

در مثال بالا جابجایی بزرگی رخ داده است در عین اینکه ما از چهارچوب معنا بیرون نیافتاده‌ایم. یعنی در همان دستگاهی که A معنایی می‌داشت (در مضمونی که از مفهوم خاص وجود در آن دستگاه پیدا شده)، $\Im(A)$ نیز بامعنی خواهد بود ولی جوهر آن عمومی‌تر از جوهر A می‌باشد. ولی پیداست که فرآیند عمومیت بخشیدن به جواهر فقط تا حدودی بامعنی است که ما از مضمون «مفهوم خاص وجود» بیرون نیافتیم (این حد و حدود را مفهوم خاص وجود تبیین می‌کند). زیرا پیش از این تصریح کرده بودیم که در هر دستگاهی ما با یک مفهوم خاصی از وجود روبرو هستیم. و گفتیم که جواهری که در قلمروی مفهوم خاص وجود تعریف می‌شوند، جوهری خاص‌تر از وجود تلقی می‌شوند. به این تعبیر در مثال بالا j_A تعبیر خاص‌تری از «عدد طبیعی بودن» است. پس می‌توان j_A را عمومی‌تر کرد و به جوهر یا مفهومی عمومی‌تر از j_A دست یافت و ما این کار را فرضاً با معرفی $j_{\Im(A)}$ کرده‌ایم. ولی این عمومیت بخشیدن را نمی‌توان با ❖ یعنی «مفهوم خاص وجود» کرد زیرا حاصلش عین خودش خواهد بود. در مضمونی که از ❖ تحقق یافته، مفهومی عام‌تر از ❖ نمی‌توان یافت مگر اینکه به مفهوم عام وجود دست یازیم که آنهم عدم است و در قلمروی ❖ برابر با صفر خواهد بود!

به عبارت دیگر می‌خواهم بگویم قضیهٔ کانتور برای مفهوم خاص وجود صادق نیست! این قضیه صرفاً برای مفاهیم خاص‌تر از مفهوم خاص وجود صادق است(مقصود از قضیهٔ کانتور Cantor Theorem است که میگوید عدد اصلی یک مجموعه کوچکتر از عدد اصلی متعلق به مجموعه توانی آن مجموعه است).

عبارت «X یک مجموعه می‌باشد» مفهوم خاصی از وجود است که براساس آن همهٔ مجموعه‌ها تحقق می‌یابند. این جمله عین ❖ در نظریهٔ مجموعه‌هاست و آن را نمی‌توان عمومی‌تر کرد. عمومی‌تر از آن عدم است و بس.

بیژن کریمی

مراجع و یادداشتها

[1]اسفار، ترجمهء خواجوی، سفر اول، جلد یک صفحهء 36 و 37

[2] Charles Seife, Zero, The Biography of a Dangerous Idea, Viking 2000, 73 صفحه

[3] معادل با atomists یعنی مکتبی که به جزء لایتجزی باور دارد.

[4] همانجا صفحه 78

[5] Robert Kaplan, "The Nothing That is", Oxford, 2000, page 33

[6] بجای "اعدادی که من خلق کرده ام"

[7]همچنین رجوع کنید به اعراف آیهء 71

[8]مشابه این موضوع را در آیه 45 آل عمران ببینید

[9] Axiomatic set theory

[10] Robert R.Stoll, «Set Theory and Logic», Dover, page 127

[11]ویل بحث بسیار شیرینی در همین زمینه ارایه میدهد که در شرح این پارادکس مفید است. رجوع کنید به:
Weyl, Continuum, Dover, Page 6

[12] طبق تعریف، مجموعهٔ توانیِ مجموعهٔ الف، دربرگیرندهٔ الف و همهٔ زیرمجموعه‌های الف است.

[13] M.Hallett, Cantorian Set Theory and Limitation of size, Oxford 1983, page 35

[14] در اینجا ما از اصطلاح جوهر همان مفهوم حکمت سنتی را ملحوظ نکرده‌ایم بلکه در حال حاضر صرفا کیفیت یا ویژگی را منظور داریم که بطور عمومی بتوان آنرا صفت یک چیز قلمداد کرد.

[15] A.Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, Dover 1946 page 21

[16] universal set

[17] دینانی شرح خوبی در این رمینه دارد: غلامحسین ابراهیمی دینانی، قواعد کلی فلسفی در فلسفهٔ اسلامی، جلد سوم صفحهٔ 78

[18] یا به زبان دیگر خواه عمل منطقی «و» را بکار برده باشیم یا عمل منطقی «یا» را بکار برده باشیم، در زنجیرهٔ نامحدود این اعمال، نتیجه همواره یکسان است: از زنجیرهٔ نامحدود اعمال منطقی، جوهر وجود استخراج می‌شود و بس!

[19] Robert R.Stoll, «Set Theory and Logic», Dover, page 129

[20]برای مثال رجوع شود به :
Bertrand Russell, The Principles of Mathematics , W. W. Norton & Company 1996 صفحهٔ 78