در زبان انگلیسی واژهٔ knot به معنی گره است. در دوران معاصر این پدیده کانون توجه ریاضیدانها قرار گرفته است و حجم وسیعی کتاب و مقاله به مطالعهٔ گره اختصاص یافته. من به سهم خود از این انبوه نوشته ها سود برده ام و بویژه این حقیقت که در سیر تکامل نظریهٔ پیام، توجه به این مطالعات و دستآوردها را ضروری میدانم لازم میبینم تا در حد توان خودم برای خوانندگان فارسی مقدماتی از فهم این مطالعات فراهم کنم.
به دلایل زیباشناسانه کاربرد برخی کلمات مثل گره در علم مناسب جلوه نمیکند. اگرچه معادل همین کلمه در انگلیسی و آلمانی بکار برده شده ولی در زبان فارسی نمیتوان آن را با واژگان دیگر ترکیب کرد و اصطلاحات تازه ساخت. مثلا به knot logic اگر توجه کنید برگردانش به کلمهٔ "منطق گره"، خوب در زبان نمیچرخد. متاسفانه بسختی بتوان واژهٔ دیگری را بجای کلمهٔ گره گذاشت و جا انداخت. در همین زمینه کلمهٔ link را به کلمهٔ زنجیر برگردانده و کلمهٔ گیر را معادل tangle بکار میبرم.
از طرف دیگر به دلایل مشابهی فکر میکنم واژهٔ مجموعه برگردان مناسبی برای رساندن مفهوم set نبوده بویژه این بیریختی زمانی آشکار میشود که ما بخواهیم مفاهیم نوینی مثل multi set را به فارسی برگردانیم. بعبارت دیگر واژهٔ مجموعه نظر به اینکه مفهومی بنیادین است باید از آغاز برایش واژه ای برمیگزیدند که استعداد ترکیب داشته باشد. به همین مناسبت من در جستجوی برگردان مفهوم set واژهٔ **توشه** را پیشنهاد میکنم. به این روال برگردان multi set کلمهٔ چندتوشه خواهد بود.
در اینجا می‌خواهم به ترجمه و تلخیص چیزی بپردازم که کافمن در مقاله‌ای تحت عنوان منطق مجازی عرضه کرده. من در ترجمه فقط به نکاتی که مورد توجهم بوده علاقمند بوده‌ام لاجرم این ترجمه ناقص و کوتاه است. دلیل این ترجمه این است که در نوشتجاتم به این نکات فکری کافمن از دیدگاه خودم رجوع خواهم داشت. در اینجا بویژه مفهوم "خویشگردی" و بحثی که کافمن پیرامونش ارایه داده مورد توجه من بوده. خواننده چنانچه مایل باشد می‌تواند به اصل این مقاله تحت عنوان "منطق مجازی"[۱] رجوع کند.

۱-مقدمه

منطق مجازی چیست؟ به روایتی، منطق مجازی عبارتست از چیزی که انرژی بخش و قوام بخش استدلال است و ضرورتا پدیدآورندهٔ فرمهای منطق و ریاضیات است.
منطق مجازی منطق نیست، موضوع و محتوای ریاضی، فیزیک یا علم سایبرنتیک هم نیست گرچه ممکن است که منطق مجازی در هریک از این رشته‌ها مستتر باشد. منطق مجازی در مرز میان نحو و معنی بسر می‌برد. لولایی است که ما را قادر می‌سازد از عالمی از اندیشه به عالمی دیگر از اندیشه حرکت کنیم. قدرت منطق مجازی در این است که صرفا در لولا بودن خلاصه نمی‌شود بلکه امکان واقعی و ابزار ارتباط میان کرانه‌هایی را فراهم می‌آورد که تا مدتها غیرقابل نفوذ قلمداد می‌شدند. در اینجا تضمینی برای موفقیت در چنین ارتباطی نیست. در اینجاست که کوششهای دلاورانهٔ ما برای ارتباط شفاف تحقق می‌یابند و شکست چاره ناپذیر ما در این امر خود تبدیل به امکانی برای کشف عوالمی نوین می‌شوند.
در بخش ۲ به جنبه های توپولوژیکی می‌پردازم و توجه من معطوف به نوار موبیوس خواهد بود. اگر نوار موبیوس را تجسم پارادکس دروغگو بگیریم می‌بینیم این پارادکس نقطهٔ پیوند اندیشه‌هایی است که کمک ما در فهم نظام‌های مشاهده هستند. در بخش ۳ به موضوع های رجوع (reference)، خویشگردی(self-reference)، نقطهٔ ثابت، بازگشت (recursion) و ارتباط آنها با اعداد مجازی می‌پردازم. در آن بخش نشان می‌دهم که عدد π ترکیبی از نقاط ثابت است که مقادیر نسبی‌شان همان نسبت پیرامون یک دایره به شعاعش را تولید می‌کند. این نکته قابل توجه است که قلمروی اعدادی که نسبت به علم حساب مجازی هستند نسبت به هندسه کاملا حقیقی (غیر مجازی) هستند. در بخش ۴

[۱] http://www.math.uic.edu/~kauffman/VirtualLogic.pdf

موضوع Church-Curry را پیرامون نقطهٔ ثابت به بحث می‌گیریم (حکم عمومی که از $GX = F(XX)$ می‌توان $GG = F(GG)$ را نتیجه گرفت) و رابطه اش را با پارادکس راسل نشان می‌دهیم. در بخش ۵ یک جابجایی ارجاعی (از $A \to B$ به $AM \to AB$) را در پرتو نقاشی ماگریت معرفی می‌کنیم. این جابجایی را با جابجایی بیننده‌ای مقایسه می‌کنیم که جهان را به دو بخش تقسیم می‌کند: آنکه می‌بیند و آنکه دیده می‌شود (شاهد و مشهود). زبان، فاصل این دو جهان است. جابجایی ماگریت الگوی مرکزی پنهان در نظریهٔ ناکاملیت گودل است.

پارادکس‌ها دروازه‌ای به عوالم نوین هستند.

قبل از ادامهٔ خواندن این نوشته، بهتر است خواننده به معمای زیر بپردازد. تصور کنید کارتی به دست شما داده‌اند که رویش نوشته است:

هیچ انسان منطقی که این کارت را در دست دارد قادر به کشف درستی یا نادرستی نوشتهٔ روی این کارت نیست.

شما این کارت را روی میز گذاشته و حین خواندن نوشتهٔ روی آن به درستی تحقیق و استدلال می‌کنید که نوشتهٔ روی کارت درست است. زیرا چنانچه نگاه دارندهٔ کارت قادر به کشف صحت وسقم نوشتهٔ روی آن می‌بود، در آنصورت این نوشته غلط از آب در می‌آمد. حالا شما دست به سوی کارت می‌برید و آنرا در دست می‌گیرید. اکنون تکلیف آن کشف صحت و سقم پیشین شما چیست؟ این علم شما به کجا می‌رود تا ناپدید شود و نوشتهٔ روی کارت درست از آب درآید؟

۲-منطق توپولوژیک، منطق پارادکس، منطق گره (knot)

(الف) یک پارادکس نافی عقل سلیم است

(ب) یک پارادکس در خودش تناقض آمیز است

یک پارادکس گاه می‌تواند مفید بحث و استدلال جهت یافتن راه حلی برای مسئلهٔ ریاضی باشد. برخی مواقع یک پارادکس همترازی هندسی و توپولوژیک دارد که با مرکزیتش ما را به حیرت وامیدارد. نوار موبیوس مثال خوبی ازچنین چیزیست.

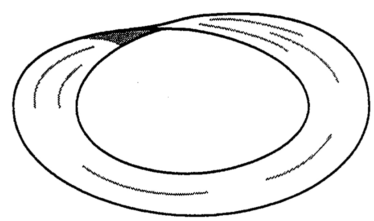


Figure 1

نوار موبیوس فقط یک لبه و یک روی دارد. بطور موضعی، ناظری که روی این نوار است دو لبه و دو روی می‌بینند. چنانچه این ناظر روی این نوار قدم بزند، نهایتا به نقطهٔ شروع خودش بازمی‌گردد ولی درمی‌یابد که اکنون روی آن طرف دیگر نوار ایستاده است. از این نظر بهتر است که دو ناظر روی این نوار متصور شویم. این دو ناظر درآغاز در نقطهٔ واحدی روی این نوار ایستاده‌اند. یکی از این دو ناظر به قدم زدن روی این نوار می‌پردازد در حالیکه دیگری سکون اختیار کرده. پس از یک دور کامل این دو ناظر همدیگر را در دو طرف متفاوت نوار می‌یابند. اگر یک دور کامل دیگر زده شود آنوقت این دو ناظر در نقطه و سوی یکسانی قرار خواهند گرفت.

نوار موبیوس پارادکسیکال به معنی (الف) است زیرا ناقض عقل سلیم است.

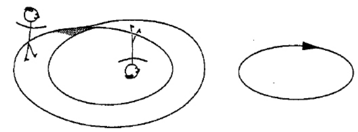


Figure 2

این نوار ارایه دهندهٔ هیئتی است که هم گویای یگانگی است (زیرا یک لبه دارد) و هم گویای چندگانگی است (از دیدی موضعی دو لبه دارد). از آنجا که این هیئتی توپولوژیک است پس هم برتابندهٔ یگانگی و هم چندگانگی در آن واحد است. پس نوار موبیوس را می‌توان پارادکسیکال به معنی (ب) گرفت (یعنی تناقض آمیز). ولی چنانچه در نوار موبیوس دقت کنیم متوجه می‌شویم که این وحدت در کثرت چگونه تحقق می‌یابد: وحدت برای ناظر بیرونی و کثرت برای ناظر درونی. مشاهدهٔ این وحدت برای ناظر درونی (موضعی) هم ممکن و قابل تصور است چنانچه این ناظر راغب به حرکت و تجربهٔ کل این نوار باشد. ناظر بیرونی هم می‌تواند این کثرت را تجربه کند چنانچه این ناظر راغب به این بازی باشد که از دیدی موضعی به نوار بنگرد و برای لحظه‌ای کل را فراموش کند.

۳-پارادکس زایندهٔ زمان است

مثال توپولوژیک مشابه یک "برگردان" (INVERTER) نوار موبیوسی است که یک نیمه تاب دارد. ناظر "سربالایی" که روی این نوار طی مسیر می‌کند هنگام عبور از این تاب "سرپایین" می‌شود. شکل زیر نمودار برگردان انتزاعی است.

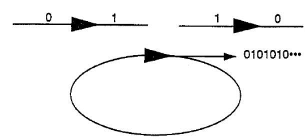


Figure 3

این برگردان یک سیگنال بولیان را گرفته و صفر درون سیگنال را به ۱ و ۱ در آنرا به صفر تبدیل می‌کند. چنانچه این سیگنال بطور مداوم از این مدار بگذرد آنوقت ما شاهد تجسم زمانمند پارادکس دروغگو هستیم، پارادکسی که در این بیانیه خلاصه می‌شود: "این جمله دروغ است". هر دوری که سیگنال می‌زند، معکوس می‌شود و محصول آن نوسانی است که گویای حضور پارادکس است. پارادکس زایندهٔ زمان است.

در جهان توپولوژیک و بی‌زمان نوار موبیوس نوسانی نیست (مگر اینکه ناظر روی آن اصرار به دویدن در طول نوار داشته باشد). تاب به کمک پیوستگی درونی نوار شکل خودش را حفظ می‌کند. بدون نوار ما تابی نخواهیم داشت و بدون تاب هم نواری نخواهد بود.

برای دست یافتن به شرایطی که در آن شاهد و مشهود یکی می‌شوند باید گامی فراتر از نوار موبیوس به مثابه شیئ توپولوژیکی برداشت. انسانِ ناظر یک نوار متفکر موبیوسی است. فضای بیرون فقط در درون معلوم می‌شود، آنهم از طریق تابی که به محسوسات بخشیده می‌شود تا آنچه درونی است ظاهر بیرونی بیابد. ناظر کل را به خیال می‌آورد که به چشم دیده نمی‌شود. ناظر تمایزی میان بیرون و درون متصور می‌شود که اساسا مجازی است. از این گذر توهم شاهد و مشهود پیدا می‌شود.

فضای افکنشی

نوار موبیوس هستهٔ مرکزی منطق فضای افکنشی سه بعدی است. تصور کنید که اشعه‌ای از سوی ناظر به سوی بینهایت پرتاب کنیم. مضاف بر این تجسم کنید که بینهایت پیش رو و بینهایت در پشت روی ما با یکدیگر مستقیما متصل هستند. کرهٔ بزرگ نقاط نامتناهی روی خودش تکرار می‌شود تا شعاع‌های پیش رو به شعاع های پشت رو وصل شوند و بدینسان هر خط مستقیمی تبدیل به دایره شود. در چنین فضای افکنشی تاب خورده، نوار موبیوس را باید در تاب

بینهایت دید. جاده ای که به پس و پیش فرستاده می‌شود خودش را در بینهایت بازمی‌یابد و تبدیل به نوار موبیوس می‌شود.

فضای شاهد

بازگردیم به نظام مشاهده کننده. نوار توپولوژیک موبیوس الگوی مجرد مناسبی است. این نظام برگردان شهود از طریق تفکیک و تمایز میان شاهد و مشهود است. این نظام برای حفظ و نگاهداری مشاهدهٔ خویش خلق شده و به محض اینکه از مشاهده بازایستد تاب خودش را از دست داده و صاف و هموار می‌شود (نوار را بریده و آنرا واتابید). این نظام شارح خویش است. $L = NOT(L)$ (یعنی خودش را با نفی خودش تعریف میکند)

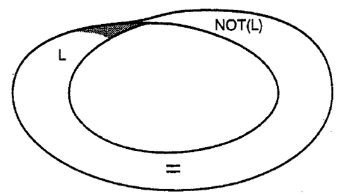


Figure 4

کاربست موبیوس

همانگونه که Ricardo Uribe نشان داده نوار موبیوس حلال مسایل واقعی در نظریهٔ راه گزینی است. فرض کنید ما نظامی متشکل از سوئیچ هایی را داریم به قسمی که هر سوئیچ کنترل یک دستگاه خاصی را به عهده دارد (مثل روشن و خاموش کردن یک چراغ). اکنون نوار موبیوس را ملحوظ کنید. پیچ و تاب این نوار تجسم یک سوئیچ است که یکی از دو ارزش را ارایه می‌دهد: تابیده یا واتابیده. اگر تاب روی نوار را برداریم و جایش "بی تاب" بگذاریم (یعنی آنرا واتابیم و

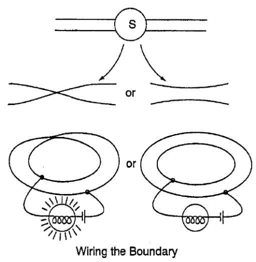


Figure 5

صاف و هموارش گردانیم) آنوقت نوار ما دو لبه و دو روی خواهد داشت.

نواری بسازید که ۱۳۷ نیم تاب داشته باشد. چنانچه هر "تاب" را با "واتاب" جایگزین کنیم آنوقت نوار ما دارای دو مولفهٔ مرزی خواهد بود. اگر هر تاب دیگری را برعکس کنیم نوار ما دوباره موبیوس خواهد شد.

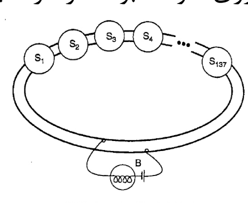


Figure 6

هر سوئیچی به نوبهٔ خود پیوستگی مرز نوار را کنترل می‌کند. اگر باطری و لامپ را بر حسب تمایز اطراف نوار نصب کنیم مدار مورد نظرمان ساخته خواهد شد (یعنی لامپ وقتی روشن شود که نوار فقط یک طرف داشته باشد و زمانی خاموش شود که نوار دو طرف داشته باشد). همانطور که پیداست طرح چنین مداری مبنی بر توپولوژی موبیوس است بدون دخالت جبر بولی. آیا چنین طرحی ساده ترین طرح ممکن است؟ خیر. آیا مدور بودن مستتر در نوار موبیوس شرط ضروری برای این طرح است؟ خیر. آیا طرح مشابهی می‌توان بر اساس منطق استاندارد و جبر بولی ریخت؟ بله با دقت و

توجه بیشتری معطوف به جبر. چه درسی می‌توان از این داستان برگرفت؟ یک پارادکس قادر به طرح داستانی است که از روی تحلیل منطقی می‌جهد. اضداد در کل به یکدیگر می‌پیوندند.

منطق منگولی

در این بخش موجز به نقطهٔ ثابت و خویشگردی از نقطهٔ نظر گره(knot) و زنجیر(link) در فضای ۳ بعدی می‌پردازیم. در اینجا نیز با همان افکار مشابه پیرامون نوار موبیوس روبرو هستیم ولی همهٔ گره‌ها، زنجیرها و گیرهای (tangle) ممکن را ملحوظ می‌کنیم. برای آشنایی بیشتر با این مفاهیم باید به آثار دیگر کافمن رجوع کرد.

گره و زنجیر توسط شکل‌هایی مثل شکل زیر نمودار می‌شوند.

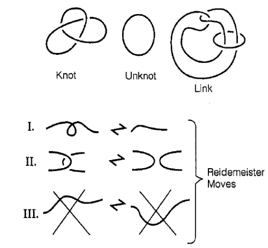


Figure 7

یک گره عبارتست از حلقه (پیچloop) بستهٔ واحدی در فضا. اگر نتوان این گره را از طریق دگردیسی توپولوژیکی به یک دایرهٔ صاف کاهش داد می‌گوئیم این گره "پیچیده" است در غیر اینصورت می‌گوییم گرهٔ مزبور "نپیچیده"(unknot) است. یک زنجیر چندین حلقه دارد. چنانچه نتوان دو حلقه را از طریق دگردیسی توپولوژیکی از هم جدا کرد می‌گوییم دو حلقه به هم زنجیر شده‌اند. منظور از دگردیسی توپولوژیکی حرکت حلقه‌هاست بی آنکه آنها را از خودشان یا از یکدیگر عبور دهیم.

شکل ۷ همچنین نمودار سه حرکتی است که زایندهٔ همهٔ دگردیسی های توپولوژیکی در فضای سه بعدی هستند. این حرکات را حرکات رایدمایستر می‌نامند. حرکات رایدمایستر زمینه ساز انتقال یک مسئلهٔ پیچیدهٔ توپولوژی حلقه‌ها به حساب نمودارهای هندسی دو بعدی هستند. این حساب نمودارهای هندسی گویای منطق مجازی ورای گره‌ها و زنجیرهاست. ریاضیات خاصی برای مطالعهٔ این شاخه از توپولوژی وقف شده (رجوع کنید به کافمن ۱۹۸۷، ۱۹۹۱، ۱۹۹۳).

در این بخش فقط اشاره به این داریم که چگونه این نمودارها به تعبیری از نظریهٔ توشه‌ها گرفته شوند بی آنکه نیازی به axiom of foundation داشته باشیم[۲]. این اصل زنجیرهٔ نامتناهی تعلق را ممنوع می‌کند (برای مثال توشه‌ای که خودش عضو خودش است $\Omega = \{\Omega\}$).

"توشهٔ منگولی" (knot set) متشکل از نمودار گره و زنجیره‌ایست که تعلق در آن طبق قرارداد زیر تعریف می‌شود:

(۱) کمانهای برچسب دار مربوط به اعضای توشه می‌شوند

(۲) اگر کمان A از زیر کمان B بگذرد آنوقت می‌گوییم که A عضو B است (می‌نویسیم $A \in B$).

در اینصورت نمودار $\Omega = \{\Omega\}$ به کمک یک تاب ساده به شکل زیر نشان داده می‌شود:

[۲] The axiom of foundation can be stated as "A set contains no infinitely descending (membership) sequence,"

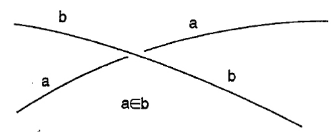


Figure 7.1

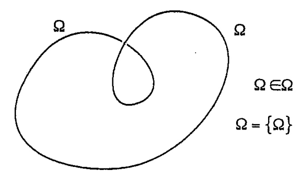


Figure 7.2

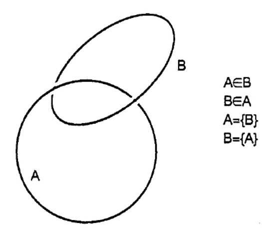


Figure 7.3

توشه‌هایی که متقابلا همدیگر را می‌سازند مثل $A=\{B\}$ یا $B=\{A\}$ نمودار یک زنجیر هستند.

در نوشته‌های دیگر (رجوع کنید به کافمن ۱۹۹۵a) رابطهٔ نظریهٔ "توشهٔ منگولی" و حرکات رایدمایستر تشریح گشته. در اینجا فقط به این نکته اشاره داریم که خویشگردی را می‌توان بسادگی به این تعبیر گرفت که میتوان بینهایت بار به دور دایره چرخید. گردش حلقه که نمودار Ωاست ناظر را متناوبا در گردشی بی پایان از مشمول به شامل و از شامل به مشمول می‌برد. در این الگوی مجرد، مشمول شامل است.

خویشگردی، نقطهٔ ثابت و بینهایت

رجوع نیازمند تمییز میان راجع و مرجوع است.

خویشگردی (رجوع به خود) نیازمند کلمه نیست.

خویشگردی می‌تواند به سادگی این باشد که هیچ نگفت.

خویشگردی می‌تواند به سادگی این باشد که بگویی "من".

خویشگردی می‌تواند به سادگی این باشد که بگویی "من منم".

خویشگردی می‌تواند به سادگی یک دایرهٔ تهی باشد.

خویشگردی می‌تواند به سادگی پیکانی باشد که به شکل یک دایره خمش کرده باشیم.

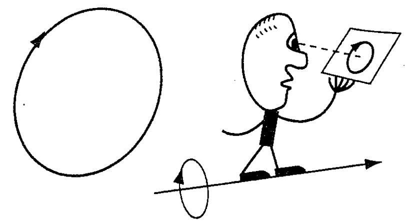


Figure 7.4

پیکانی که به صورت یک دایره خم شده می‌تواند در حضور یک ناظر اینگونه دیده شود که به خودش رجوع کند.
یک پیکان اشاره به چیزی دارد.
پیکانی که اشاره به خودش دارد خویشگرد است.
یک شیئ که به کمک یک پیکان به خودش اشاره دارد خویشگرد است.

$A \to A$

ناظری متحرک روی پیکانی که به خودش اشاره دارد سفری مشابه سفر ناظری را تجربه می‌کند که در مسیر بینهایت پیکان یکسویه پهلوی هم گذاشته شده حرکت می‌کند. این بینهایت پیکان یکسویه تصویر بازشدهٔ پیکان خویشگردند.

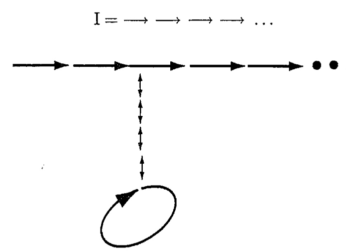


Figure 7.5

باز شدن یک پیکان خویشگرد را نقطهٔ ثابت آن پیکان می‌دانیم $I = \to I$ هر خویشگردی ای پدیدآورندهٔ یک نقطهٔ ثابت است.
در نقطهٔ ثابت، I همان چیزیست که رجوع به آن صورت می‌گیرد.
من همان I هستم که تو با پیکانی بهش اشاره می‌کنی.
من $\to I$ هستم
رجوع همان شهود است
شهود هم رجوع است
من عبارتم از {شهودِ $\to I$}
"من آن نسبت مشهودی هستم که میان خودم و خودِ ناظرم برقرار است" (VON Forester, ۱۹۸۱)
در این درهم پیچیدگی امکان بازگشت به سکوت موجود است
ساختار فرمال یک پارادکس $L = NOT(L)$ ساختار یک نقطهٔ ثابت است $L = F(L)$
در سطح مناسبی از تجرید هر اُپراتوری یک نقطهٔ ثابت دارد. بینهایت تکرار را مجاز قلمداد کنیم.
در آغاز $\chi = F(F(F(F(\ldots))))$
سپس $F(\chi) = F(F(F(F(\ldots)))) = \chi$
مثال هندسی آن در شکل زیر نشان داده شده

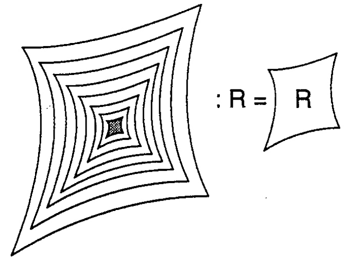


Figure 7.6

مثال عددی آن کسر زنجیره‌ای زیر است

$f = 1 + 1/(1 + 1/(1 + \ldots))$ یا به عبارت دیگر $f = 1 + 1/f$

مثال دوم از همین موضوع، در بینهایت جذر گرفتن می‌باشد. اگر بنویسیم $SQRT(A) = \sqrt{A}$ آنوقت می‌توان نوشت

$g = SQRT(1 + SQRT(1 + SQRT(1 + \ldots)))$ یا به عبارت دیگر $g = SQRT(1 + g)$

f و g هر دو در خویشگردی مجازی‌شان تعریف می‌شوند. در علم حساب ما تساوی ایندو را با کاربست علم معمولی ریاضی روی نقطهٔ ثابت آنها نشان می‌دهیم.

$$f = 1 + 1/f$$
$$ff = f(1 + 1/f) = f1 + f(1/f) = f + 1$$
$$f^2 = f + 1$$
$$g = SQRT(1 + g)$$
$$gg = SQRT(1 + g)SQRT(1 + g) = 1 + g = g + 1$$
$$g^2 = g + 1$$

f و g هر دو جوابهای مثبتی به معادلهٔ $x^2 = x + 1$ هستند. بنابراین $f = g$

$$1 + 1/(1 + 1/(1 + \ldots)) = SQRT(1 + SQRT(1 + SQRT(1 + \ldots)))$$

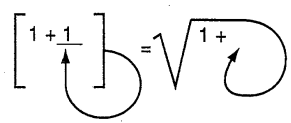


Figure 7.7

خویشگردی یکی از اجزای مجازی زنجیرهٔ استدلال بالاست.

مثالی دیگر:

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots$$
$$S = 1 + a(1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots)$$
$$S = 1 + aS$$
$$S - aS = 1$$
$$S(1 - a) = 1$$
$$S = 1/(1 - a)$$

مثالش در ریاضی کلاسیک معادلهٔ اویلر برای عدد e^x است:

$$e^x = (1 + x/\infty)^\infty$$

مجازی بودن در اینجا در استفاده از نشان بینهایت می‌باشد. بینهایت مفهومی خویشگرد است:

$$\infty = 1+1+1+1+1+\ldots$$

$$\infty = 1+\infty$$

فرمول اویلر تعبیریست از حد $(1+1/N)^N$ وقتیکه Nبه سوی بینهایت میل کند. ولی نشان ∞ عنصریست که در زبان ریاضی و تغییر و تبدیل هایش می‌تواند بکار گرفته شود.

بگذارید به تغییر و تبدیل فرمول مشهور اویلر بپردازیم، فرمولی که اعداد iو πو eو ۰ و ۱ را به همدیگر ربط می‌دهد:

$$e^{i\pi}+1=0$$

مقصود از πنسبت پیرامون دایره به قطرش است و iهمان عدد مجازی است که برایش داریم $i^2=-1$

پس می‌نویسیم:

$$e^{i\pi} = (1+i\pi/\infty)^{\infty}$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$(1+i\pi/\infty)^{\infty} = -1$$

$$((1+i\pi/\infty)^{\infty})^{1/\infty} = (-1)^{1/\infty}$$

$$1+i\pi/\infty = (-1)^{1/\infty}$$

$$i\pi/\infty = (-1)^{1/\infty}-1$$

$$i\pi = \infty((-1)^{1/\infty}-1)$$

$$\pi = \infty[((-1)^{1/\infty}-1)/i]$$

این فرمول پررمزورازی در بیان عدد πاست که مستقیما آنرا از فرمول اویلر گرفتیم.

درواقع می‌توان از این فرمول برای محاسبهٔ تقریب عدد πاستفاده کرد. برای اینکار باید ریشهٔ M اُم عدد ۱- را ملحوظ داشت، یعنی $(-1)^{1/M}$بقسمی که M توانی از ۲ باشد سپس با کاربست فرمول

$$SQRT(A+Bi) = SQRT((1+A)/2)+iE(B)SQRT((1-A)/2)$$

وقتیکه $A^2+B^2=1$ و $E(B)$برابر باشد با ۱ یا ۱- بسته به اینکه B مثبت باشد یا منفی. ذکر این جزئیات چندان مهم نیست. مهم این است که فرمول پررمزوراز بالا حقیقتا بیانیهٔ درستی در وصف طبیعت عدد πاست. برای فهم این موضوع باید در معنای $(-1)^{1/\infty}$ دقت کرد.

لایبنیتس عدد مجازی $i = SQRT(-1) = (-1)^{1/2}$ را به عنوان یک دوزیستی توصیف کرده بود که میان هستی و نیستی بسرمی‌برد.

عدد i حقیقی نیست

مجذور هر عدد حقیقی مثبت است

i^2برابر است با -1

-1واحدی منفی است نشانهٔ نیستی

$+1$واحدی مثبت است نشانهٔ هستی

i در عالم برزخی میان هستی و نیستی است

عدد i خودش تجسم پارادکس دروغگوست چنانچه قراداد کنیم

$$\langle NOT\rangle(x) = -1/x$$
$$\langle NOT\rangle\langle NOT\rangle(x) = -1(-1/x)) = --x = x$$
$$i = -1/i$$
$$i = \langle NOT\rangle i$$

گاوس این رابطه را به این تعبیر قشنگ از عدد i ترسیم کرد: به مثابه نقطه‌ای روی صفحه، به اندازهٔ واحد جهتدار روی محوری قائم بر محور اعداد حقیقی

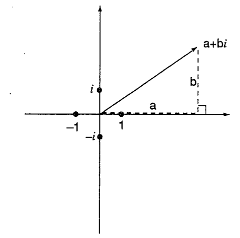


Figure 8

در صفحهٔ گاوسی همهٔ اعداد به شکل $A+Bi$ (بقسمیکه A و $\mathbf{B}$ عدد حقیقی باشند) نقاطی هستند که مختصات افقی‌شان A و مختصات عمودی شان $\mathbf{B}$ است (این شکل از نمایش عدد گویای عدد ممزوجی است که آنرا در ریاضی عدد کمپلکس می‌نامند). چنین نقطه‌ای را می‌توان بصورت یک پیکان نیز ملحوظ کرد، پیکانی که ار مرکز محور مختصات بیرون آمده و به نقطهٔ (A,B) ختم شده. پس هر عدد کمپلکسی به شکل $A+Bi$ را می‌توان بصورت پیکانی از مرکز به نقطه ای در صفحه درنظر گرفت. در اینجا هماهنگی ویژه‌ای با هندسه پدیدار می‌شود. هر پیکانی را می‌توان در دو شاخص خلاصه کرد: θ زاویه ای که با محور افقی می‌سازد و R شعاعی که نمودار فاصلهٔ آن با مرکز است. مثلا $Z=[R,\theta]$ نمدار پیکانی است که شعاعش از مرکز R و زاویه‌اش با محور افقی برابر با θ است.

ضرب اعداد کمپلکس تابع قاعدهٔ بردارهاست: طول ها را درهم ضرب کرده و زوایا را با هم جمع می‌کنیم

$$[R,\theta][S,\phi] = [RS, \theta+\phi]$$

این قاعده کاملا همخوان است با این فرمول که: $ii=-1$ زیرا i طولی برابر با ۱ و زاویه‌ای برابر با ۹۰ درجه دارد. پس چنانچه در خودش ضربش کنی زاویه‌ای برابر با ۱۸۰ پیدا می‌کند و طولی برابر با ۱. عددی که مربوط به زاویهٔ ۱۸۰ درجه و طول ۱ می‌شود دقیقا همان عدد -1 است.

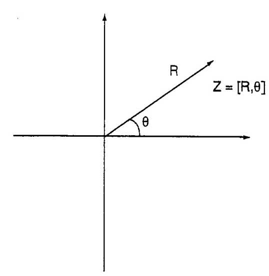


Figure 9

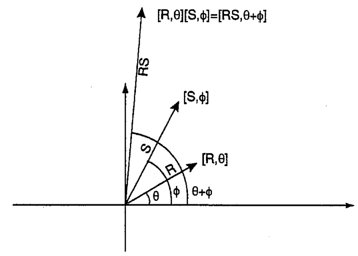


Figure 10

عموما می‌توان گفت عدد i را در هر پیکانی ضرب کنی آن پیکان را ۹۰ درجه در جهت معکوس عقربهٔ ساعت می‌چرخاند.

اکنون در جستجوی فهم حد $(-1)^{1/\infty} = SQRT(SQRT(\dots SQRT(-1)\dots)$، ما به تعبیر $SQRT(-1), SQRT(SQRT(-1))), SQRT(SQRT(SQRT(-1))),\dots$ می‌پردازیم. داریم:

$$(-1)^{1/\infty} = SQRT(SQRT(\dots SQRT(-1)\dots)$$
$$-1 = [1,180] = [1,\pi]$$
$$SQRT(-1) = [1,\pi/2]$$
$$SQRT(SQRT(-1)) = [1,\pi/4]$$
$$SQRT^{N}(-1) = [1,\pi/2^{N}]$$

عدد $SQRT^{N}(-1)$ یک عدد کمپلکس است که بخش حقیقی‌اش نزدیک به ۱ است و بخش مجازی با دقت بسیار منطبق بر جزء $1/2^{N}$اُم نیمه-پیرامون دایره‌ای به شعاع واحد است.

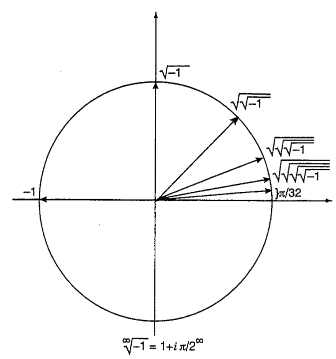


Figure 11

$[SQRT^{N}(-1)-1]$ بطور تقریبی برابر است با حاصلضرب i در طول قوسی از یک دایره به شعاع واحد بقسمیکه پیرامون آن دایره به 2^{N} جزء مساوی تقسیم شده باشد. بنابراین $2^{N}[(SQRT^{N}(-1)-1)/i]$ باید تقریب خوبی باشد برای عدد π یعنی

$$\pi = 2^{\infty}[(SQRT^{\infty}(-1)-1)/i]$$

این تعبیر دیگری از فرمول پررمزوراز ما در بیان عدد π است. متوجه باشید که 2^{∞} و $SQRT^{\infty}(-1)$ هر دوشان نقطهٔ ثابت هستند $(22^{\infty} = 2^{\infty}, SQRT(-1) = SQRT^{\infty}(-1))$ با این ویژگی که عدد π را برحسب فرمهای خویشگرد تعریف می‌کنند. عدد π در این تعبیر الگوی تداخل همهٔ رجوع ها برای همهٔ ناظر هاست. فرمول اولیهٔ اویلر $e^{i\pi}+1=0$ اکنون نتیجهٔ مستقیم هندسی است که در فرمول زیر مستتر است

$$\pi = 2^{\infty}[(SQRT^{\infty}(-1)-1)/i]$$

۴- نقاط ثابت و توشهٔ راسل

بینهایت تکرار مایهٔ حیات بازگشت (recursion) است.

یک خویشگردی اولیه (همچون "من منم") از یک درخودپیچیدگی برخوردار است که از بینهایت جزء بی نیازش می‌کند. نقطهٔ ثابت عمومی برای F می‌تواند بدون بینهایت بار بکاربستن F روی خودش تولید شود. محتوای نظریهٔ نقطهٔ ثابت Church و Curry همین است.

اگر $Gx = F(xx)$ پس $GG = F(GG)$

GG یک نقطهٔ ثابت است برای F

این شیوهٔ تولید نقطهٔ ثابت، مثال منطقی شیوهٔ تولید $SQRT(2)$ به کمک ترسیم قطر مربعی به طول واحد است

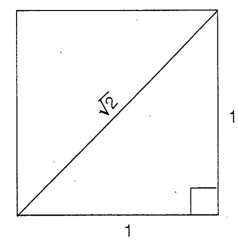


Figure 11.1

پرش به بینهایت در یک آن صورت می‌گیرد و ناظر باید بازنگرد تا دریابد چگونه با کاربست مفاهیمی از ابعادی دیگر، از پرت شده به پرتگاه پهناوری پرهیز شده و از رویش جهشی صورت گرفته.

نقد این جهش فقط زمانی مناسبت پیدا می‌کند که جهش صورت گرفته باشد.

$Gx = F(xx)$

جملهٔ بالا چه معنایی دارد؟ مقصود از F چیست؟

متوجه باشید وقتیکه نوشتیم $g = F(F(F(F\ldots)))$ این پرسش برایتان مطرح نشد.

در روزگار قدیم F چیزی بود که می‌توانستی آنرا در فُرم $F(Y)$ به هر چیز دیگری (مثل Y) تعریض (apply) کنی (مقصود تعریف قدیمی مفهوم تابع است). مثلا F می‌توانست جعبه‌ای باشد که Y را درونش قرار دهیم. مثلا می‌توانست فرمالیسم ریاضیات ناشناختهٔ سیارهٔ ترالفامیدور[۳] باشد.

نگارش XY بر این فرض استوار است که X و Y قادر به پهلوی همدیگر گذاشته شدن هستند.

نگارش $Gx = F(xx)$ دقیقا همان معنایی را می‌دهد که این فرمالیسم برمی‌تاباند.

x را برگیرید

تکثیرش کن به شکل xx

بگذارش درون $F()$

فرمول $Gx = F(xx)$ گویای کارکرد G است

(اکنون کمی احتیاط بخرج دهید)

علامت تساوی در $Gx = F(xx)$ نسخه ایست برای پیچیدن عملکرد "x را تکثیر کن و هردو کپی را بگذار درون $F()$"

[۳] The Tralfamadorians are a fictional alien race mentioned in several novels by Kurt Vonnegut. Tralfamadore is their home planet.

اکثر مواقع کاربست این فرمول بی خطر است. ولی اگر G روی خودش بکار بسته شود، آنوقت GG نمودار کاربست G روی خودش خواهد بود لاجرم معادلهٔ $GG = F(GG)$ معادله ای برای کارکرد خواهد بود.

$$GG = F(GG) = F(F(GG)) = F(F(F(GG))) = \ldots$$

بنابراین GG زایندهٔ یک بازگشت است.

ممکن است بپرسید "چرا علامت تساوی را به معنی این همانی نگیریم؟"

درآنصورت $GG = F(GG)$ و GG یک کپی از خودش را درون خودش دارد.

آنوقت $Gx = F(xx)$ به این معنی است که Gx عبارتست از $F(xx)$

آیا G وجود دارد؟

این موضوع آدم را به یاد اثبات انسلم (Anselm) پیرامون وجود خداوند می اندازد.

فرضیه: هستی قویتر (بزرگتر) است از نیستی

تعریف: خداوند چیزیست که قویتر و بزرگتر از آن در تصور نیاید

اثبات: چنانچه خداوند وجود نمیداشت، ما کماکان قادر به تصور خدایی بودیم که وجود میداشت. از آنجا که خدای موجود قویتر است از خدای ناموجود، عدم وجود خدا ناقض فرضیه است.

بنابراین خدا وجود دارد.

برگردیم به G. تعبیر زیر را ملحوظ کنید: XY یعنی Y عضوی از X است.بگذارید $\sim X$ نمودار غیر X باشد یعنی

$$\sim X =< NOT > X$$

پس $Rx = \sim xx$ معرف R به معنی این جمله است "x فقط زمانی عضو R است که x عضو x نباشد"

R همان توشهٔ راسل است.

جانشینی $RR = \sim RR$ گویای این است که R فقط زمانی عضو R است که R عضو R نباشد.

آیا RR وجود دارد؟

البته که RR وجود دارد.

RR بمثابه مفهومی وجود دارد که امتدادش هرگز کاملا درک نمی‌شود.

RR در ساختار نوار موبیوس وجود دارد.

RR در فرآیندی وجود دارد که آنچه هست را در آنچه می‌تواند باشد دربرمی‌گیرد.

پارادکس زایندهٔ فضا و زمان است.

۵- انتقال ماگریت

یک اثر معروف از رنه ماگریت تصویر رئالیستی از یک پیپ است که زیر آن (دورن چهارچوب نقاشی) نوشته "این یک پیپ نیست".

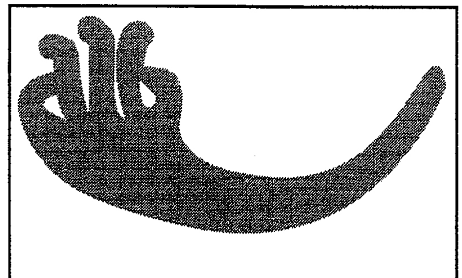


Figure 12

معمولا این جمله را معطوف به تصویر پیپ می‌گیرند، انگاری که این اثر نقاشی می‌گوید

"تصویر یک پیپ خود یک پیپ نیست" یا "نقشهٔ یک سرزمین خود یک سرزمین نیست"

البته اگر ما قادر به اشارهٔ موشکافانه به تمییز میان یک نقشه و سرزمین بودیم، آنوقت نقشهٔ یک سرزمین خود یک سرزمین نمی‌بود.

البته یک نقشه خود سرزمین است.

یک سرزمین خود یک نقشه است.

واقعیت عین همان پیدایش واقعیت است.

جهان عبارتست از همان چیزی که هست چنانچه اصلا چیزی بتواند باشد.

جهان نقشهٔ فرآیند فضازمان است، گُل نیستی در هیچی ادراک.

اشاره به این نکته شاید مفید باشد که جملهٔ زیبایی که زیر پیپ نوشته (ببخشید تصویر پیپ) ضرورتا به تصویر پیپ رجوع نمی‌کند. این جمله می‌تواند به کرباس تابلو، یا چهارچوبش، به ناظر یا حتی به خودش رجوع داشته باشد.

باید پرسید ماگریت چه کرده است؟ آیا وی نخست جمله را روی کرباس سفید نوشته است؟ یا اول پیپ را کشیده سپس جمله را زیرش نوشته؟ بگذارید فرض بر حالت دوم بگیریم تا نکتهٔ خاصی را از این توشهٔ ماگریت ها برجسته کنیم.

یک ماگریت از میان ماگریتها و "غیر پیپ هایشان " نخست تصویر پیپ را کشیده است در حالیکه جملهٔ "این یک پیپ نیست" را تمام مدت در ذهنش نگاه داشته است.

جمله‌ای که در همه حال و همواره به تصویر رجوع دارد.

سپس ماگریت جمله را از توی ذهنش بیرون کشیده که روی نقاشی‌اش بکشد تا وصف مخلوق خودش را به مخلوقش بیافزاید.

اثر نقاشی به این ترتیب به دنیا آمده. اسم این اثر چیست؟

اسم این اثر بدون جملهٔ مذکور بوده "این یک پیپ نیست"

اثر نقاشی جمله‌دار اسمی دارد که فراسوی زبان است.

اسم شیئ (اسمی که وصف چیزی است که آن شیئ نیست) به شیئ اضافه شده

شیئ جدید اسم ندارد

آیا می‌توان همان اسم قدیمی را برای شیئ مجاز دانست؟

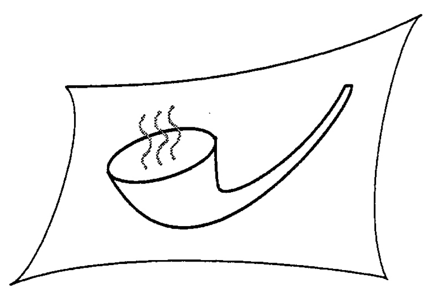
شاید بتوان توی پرانتزش گذاشت؟

چه باید کرد؟

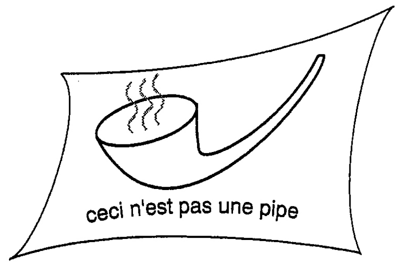
من آموخته ام که تو را هانس صدا کنم.

هرگاه تو را می‌بینم تو شخص ناآشنایی نیستی
تو هانس هستی
در تخیل من اسم تو با تو همراه است
و در ذهن من
من تو را می‌بینم و اسم تو چند پاره می‌شود
بخشی از آن ادراک من از بدن تو در فضاست
بخش دیگر در قوهٔ زبان من است.
آیا باید آن بخش از تو را که در قوهٔ زبان من است "هانس خود" یا "ماوراء هانس" یا "هانس ماگریت" بنامم؟
هانس ← شخص
هانس خود ← شخص هانس
بگذارید این "ماورای هانس" یا "هانس ماگریت" را با "میم هانس" نشان دهیم
در زبان انگلیسی ما هانس را برای هر دوی حالات بکار می‌بریم
هر رجوع معناداری ، اسم را برای یک ناظر دقیقا به همین شیوه چندپاره می‌کند
نقشه و سرزمین درهمدیگر پیچیده هستند
درگیری یک ناظر عبارتست از طنین اسم و جابجایی
فروریختن اسم و "اسم جابجا شده" مبحث را فشرده می‌کند
میم هانس = هانس
و درواقع هم همینطور است
هانس خود، هانس است

در مورد ماگریت ما نخست نقاشی و رجوع را داشتیم



"این یک پیپ نیست" ←
ماگریت سپس جابجایی را با حکاکی نوشته روی اثر نقاشی انجام می‌دهد.



"این یک پیپ نیست میم"[۴] $\leftarrow$

الگوی این جابجایی ماگریت را اینگونه نظام می‌بخشیم:

فرض کنید مقصود از $A \to B$ این باشد که A به B رجوع می‌کند

ساختار A و B را باز می‌گذاریم

حالا جابجایی از یک رجوع به رجوع دیگر را اینجور نشان می‌دهیم

$AM \to AB$

جابجایی $A \to B$ عبارتست از $AM \to AB$

قضیه: اگر I اسم اپراتور در جابجایی ماگریت باشد، پس خواهیم داشت $IM \to IM$ یعنی IM به خودش رجوع می‌کند (خویشگرد است)

اثبات: از آنجایی که I اسم M است، داریم $I \to M$. جابجایی این رجوع عبارتست از $IM \to IM$

مجادلهٔ ما از اینقرار است که خویشگردی فرمال که در این قضیه نمودار شده، خویشگردی شخصی را برجسته می‌کند. وقتی من میگویم "من"، یک جدایی صورت می‌گیرد میان "منی که نام می‌نهد" و "منی که نامیده می‌شود". بگذارید در اینجا این پرونده را بازرسی کنیم

سکوت

من

من می‌گویم من

من همانی هستم که می‌گوید من

من خود منم

من تصور میکنم که بتوانم خودم را به دو بخش کنم: نیمی که می‌بیند و نیمی که دیده می‌شود.

هر دو من هستند

جدا ولی عین هم

بگذارید "من" نمودار آنی باشد که می‌بیند

(دیدن یک نوع از رجوع است)

بگذارید "خودم" آنی باشد که دیده می‌شود

بگذارید I نمودار من و M نمودار خودم باشد

من خودم هستم

من خودم را می‌بینم

من رجوع به خودم دارم

---

[۴] در اینجا مقصود از میم، جابجایی است که آنرا جابجایی ماگریت نامیده

$$I \to M$$

جابجایی را "خودم" انجام می‌دهد

$$A \to B$$

$$AM \to AB$$

عمل جابجایی، شاهد و مشهود را درهم می‌پیچد

$$I \to M$$

$$IM \to IM$$

"من خود" همان "من خود" هستم

من همانی هستم که هستم

این ثبات زبانی خویشگردی است.

Barendregt, H.F. (1984). *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*, North-Holland, Amsterdam.

Berkowitz, G.C., Greenberg, D.R., and White, C.A. (1988). An approach to a mathematics of phenomena: canonical aspects of reentrant form eigenbehaviour in the extended calculus of indications. *Cybernetics and Systems* **19**, 123–167.

Gödel, K. (1931). *On Formally Undecidable Propositions in 'Principia Mathematica' and Related Systems* (transl. B. Meltzer), Braithwaite, R. B. (ed.), Basic Books, New York (1962).

Kauffman, L.H. (1987a). *On Knots*, Princeton University Press, Princeton .

Kauffman, L.H. (1987b). Self reference and recursive forms. *Journal of Social and Biological Structures*, 53–72.

Kauffman, L.H. (1991, 1993). *Knots and Physics*, World Scientific.

Kauffman, L.H. (1994). Ways of the game: play and position play. *Cybernetics and Human Knowing* **2** (3), 17–34.

Kauffman, L.H. (1995a). Knot logic. In Kauffman, L.H. (ed.), *Knots and Applications*, World Scientific, pp. 1–110.

Kauffman, L.H. (1995b). Arithmetic in the form. *Cybernetics and Systems* **26** , 1–57.

Kauffman, L.H. and Varela, F.G. (1980). Form dynamics. *Journal of Social and Biological Structures* 3, 171–206.

Laraudogoitia, J.P. (1990). This article should not be rejected by Mind. *Mind* **99**, 598–599.

Löb, M.H. (1955). Solution of a problem of Leon Henkin. *Journal of Symbolic Logic* **20**, 115–118.

Mendelson, E. (1987). *Introduction to Mathematical Logic*, Wadsworth and Brooks/Cole .

Pedretti, A. (ed.) (1979). *Self-reference on the Isle of Wight*, Transcripts of the first International Conference on Self-reference, 24–27 August, Princelet Editions, London.

Pedretti, A. (1981). *Cybernetics of Language*, Princelet Editions, London. (In the I of Language, 2nd edn of *Cybernetics of Language*, to appear).

Spencer-Brown, G. (1979). *Laws of Form*, E.P. Dutton.

Uribe, R. (1995). *Tractatus Paradoxico-Philosophicus* (preprint, University of Illinois at Urbana–Champaign).

von Foerster, H. (1981). Objects: tokens for (Eigen-) behaviours (reprinted) in *Observing Systems*, Intersystems, pp. 274—285.